至福の超現実数

純粋数学に魅せられた男と女の物語

SURREAL NUMBERS

HOW TWO EX-STUDENTS TURNED ON TO PURE MATHEMATICS AND FOUND TOTAL HAPPINESS

D・E・クヌース　松浦俊輔＝訳



柏書房

至福の超現実数

純粋数学に魅せられた男と女の物語

SURREAL NUMBERS

HOW TWO EX-STUDENTS TURNED ON TO PURE MATHEMATICS AND FOUND TOTAL HAPPINESS

D・E・クヌース　松浦俊輔＝訳

柏書房



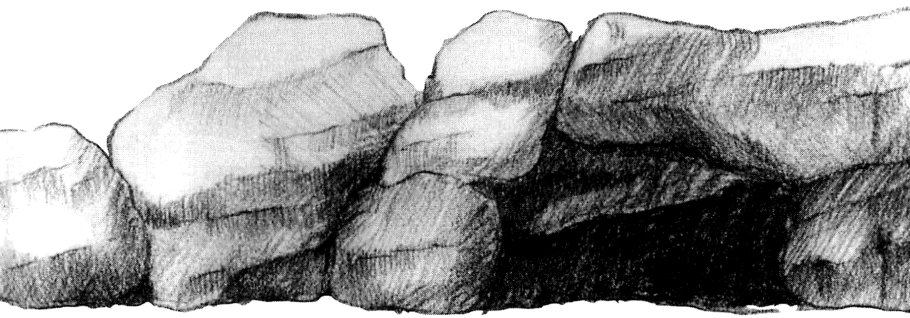
目　次

AUTHORIZED TRANSLATION FROM THE ENGLISH LANGUAGE EDITION,ENTITLED
SURREAL NUMBERS HOW TWO EX-STUDENTS TURNED ON TO PURE MATHEMATICS
AND FOUND TOTAL HAPPINESS,1ST EDITION,ISBN:0201038129 BY KNUTH,DONALD E.
PUBLISHED BY PEARSON EDUCATION,INC.,PUBLISHING AS ADDISON WESLEY
PROFESSIONAL,COPYRIGHT ©1974

JAPANESE LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY KASHIWA SHOBO, COPYRIGHT ©2004.
JAPANESE TRANSLATION RIGHTS ARRANGED WITH PEARSON EDUCATION,INC.,
PUBLISHING AS ADDISON WESLEY PROFESSIONAL,INDIANAPOLIS,USA
THROUGH TUTTLE-MORI AGENCY,INC.,TOKYO

第一章 ―――― 岩

この物語の主人公はアリスとビル。ふたりは文明世界から逃げ出して、海辺で長い休暇を過ごしていたが、そんなふたりもそろそろ退屈していた。ある日のこと。ふたりはヘブライ文字が刻まれた岩を発見する。そこに刻まれた文章は、どうやらコンウェイなる数の造り主が、数を「左集合」と「右集合」なるものを用いて定義したものらしい…。



ⓐ　ビル、わかった？

❺　どういうこと？

ⓐ　ほら——こんなインド洋の果てまで来て、文明から遠く離れてるじゃない。システムに取り込まれるのがいやで逃げだして、「自分を見つけに」来て何か月もたったでしょ。見つかったかなあと思って。

❺　実はね、僕も同じことを考えてた。この何か月か一緒にいて、本当によかった——僕らはとことん自由で、お互い気心も知れてるし、機械じゃなくて、また本当の人間に戻ったって感じがするよ。でもここのところ、僕たちが「逃げだして」きたところが恋しくなってるんじゃないかって思うんだ。ほら、本が読みたいとかね——どんな本でもいいから。教科書でもいいよ。数学の教科書だっていいよ。おかしなことだけど、こうやってごろごろしながら、クロスワード・パズルでもあったらなあって思ったりしてた。

ⓐ　あらあらしっかりしてよ。クロスワードはないでしょ。そんなのはもっと年を取ってからやることよ。でも言いたいことはわかる。頭に刺激が必要ってことよね。

ちょっと小さいときの夏休みの終わりって感じかな。毎年、五月になったら、もう学校が休みになるのが待ちきれなくて、夏休みが始まるまでは、ひたすらだらだらしてるのに。でも九月には学校に戻るのがほんとにうれしかった。

ⓑ　確かにね。パンもあって、お酒もあって、そばにはアリスがいて、でもここのところはまさに「だらだら」だ。でも、この旅行でわかった最大のことは、単純でロマンチックな生活だけでは足りないってことだね。何か複雑なことを考えたくなってきたよ。

ⓐ　悪かったわね。私が複雑じゃなくて。起きて海辺をもっと探してみない？　ひょっとしたら小石とか、新しいゲームに使えるものとか見つかるかも。

ⓑ　（体を起こしながら）ああ、それはいいねえ。でもまずひと泳ぎしよう。

ⓐ　（海に向かって走りながら）私も——私に追いつけるかしら。

ⓑ　ねえ、あの黒い岩って何だろう。あそこに半分砂に埋まってるやつ。

ⓐ　知らないわよ。前はそんなもの見たことないし。ほら、後ろに何か書いてある。

ⓑ　どれどれ。掘り出すのを手伝ってくれる？　なんか、博物館にでもあるやつみたいだ。うーん。重いよ、これ。彫ってあるのは昔のアラビアの文字かなあ……違う、待てよ。これはヘブライ語だ。こうやってひっくり返してみよう。

ⓐ　ヘブライ語！　わかるの？

ⓑ　小さい頃はヘブライ語をいっぱい習ったからね、これなら読めそうだ……

ⓐ　このあたりで考古学の発掘があったって話は聞かないわよ。もしかして、またロゼッタ・ストーンかなんか見つけたのかもね。なんて書いてあるの？　意味わかった？

ⓑ　ちょっと待って。やらせてみてよ……上の右側のここから始まって、どうも「初め、すべては空虚だった。」そして……

ⓐ　すごい。それって旧約聖書の出だしみたいじゃない。モーセは40年、アラビアをさまよって仲間を連れてイ

スラエルにたどり着いたんじゃなかったの？　まさかこれって……

ⓑ　違うよ。伝わっている話とは全然違う話だよ。こいつをキャンプまで引きずって行こう。訳せると思うよ。

ⓐ　ねえ、すごいじゃない。それこそ、ビルが欲しがってたものでしょう。

ⓑ　そうだね。何か読みたくて死にそうだって言ってたからな。こういうのを考えてたわけじゃないんだけどね。早くもっとじっくり見てみたいよ——ちょっと変なところもあるし、これが何かの話なんだかどうだか、わからないし。数のこともあるし……

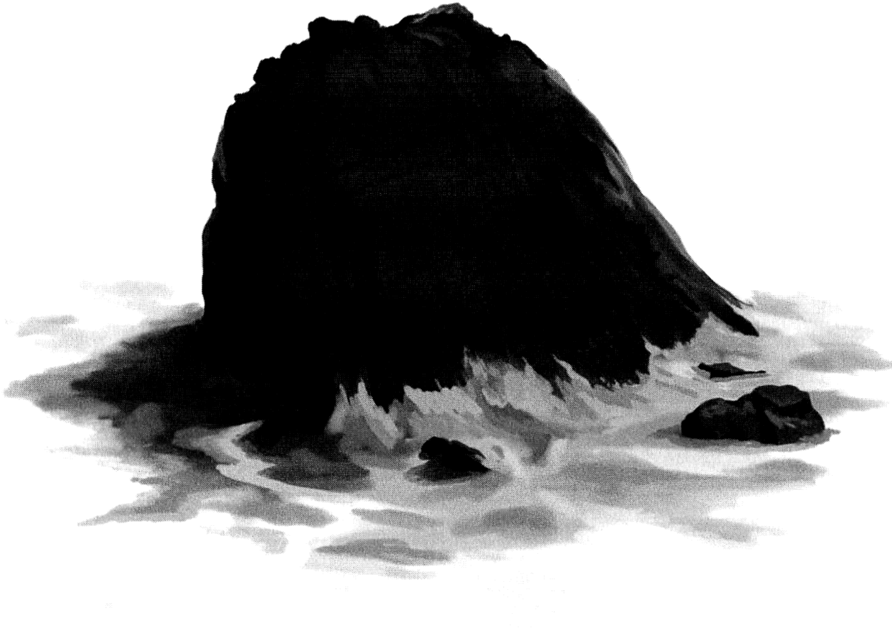
ⓐ　下のところで折れちゃってるみたい。元はもっと長かったのよ。

ⓑ　ちょうどよかったんだ。でなきゃ運べなかったよ。ちょうどの切れ目で内容が面白くなりそうなんてことになるかどうか、運任せだけどね。

ⓐ　これでいいわね。夕飯用の椰子の実とか果物とか、取ってくるわ。その間に訳しちゃって。悪いけど、語学は得意じゃないの。得意だったら手伝うんだけど。

＊＊＊

ⓑ　アリス、わかったよ。いくつかよくわからないところもあるし、見たことがない記号なんかもあるけど、たぶん何かの古い語形なんじゃないかな。全体としては何が書かれているか、わかったと思う。意味はよくわからないんだけどね。直訳したらこうなった。



初め、すべては空虚だった。Ｊ・Ｈ・Ｗ・Ｈ・コンウェイは数の創造を始めた。コンウェイは言った。「大も小も、あらゆる数を生む二つの規則あれ。第一の規則はかくのごとし。すべての数は、前に作られた数から成る二つの集合に応じ、左集合のいかなる要素も、右集合のどの要素より大きくもなく、それに等しくもないこと。第二の規則はかくのごとし。ある数が別の数より小さいかそれに等しいのは、第一の数の左集合のいかなる要素も第二の数より大きくもなく、それに等しくもなく、かつ、第二の数の右集合のいかなる要素も、第一の数より小さくもなく、それに等しくもない場合のみである」。そしてコンウェイは自ら作った二つの規則を調べた。すると見よ、規則はうまくいった。

そして空(から)の左集合と空の右集合から最初の数が創造された。コンウェイはこの数を「ゼロ」と呼び、これは正の数と負の数を分けるしるしとすると言った。コンウェイはゼロはゼロより小さいかそれに等しいことを証明し、それを良しとした。夕べがあり朝があった。第ゼロ日である。翌日、さらに二つの数が創造された。一つは左集合とするもの、もう一つはゼロを右集合とするもの。コンウェイは先のものを「いち」と呼び、後のものを「マイナスいち」と呼んだ。そしてマイナスいちはゼロより小さいが、ゼロに等しくはないこと、ゼロはいちより小さいが、いちに等しくはないことを証明した。夕べがあり……

ここで切れてる。

ⓐ　そう書いてあるのは確かなの？

ⓑ　だいたいね。少し整えはしたけど。

ⓐ　でも「コンウェイ」って、ヘブライ人の名前じゃないわ。ふざけてるに決まってる。

ⓑ　そんなことないって。まじめだよ。確かに古いヘブライ語は母音を書かないから、本当の名前はケーナウとか何とかかもしれないけどね。モンゴルのカーンの親戚かな。違うんじゃないかな。英語にある名前を使っただけだ。ほら、石の方ではここに出てくる。J・H・W・H・は「エホバ」を表すこともありうるし。

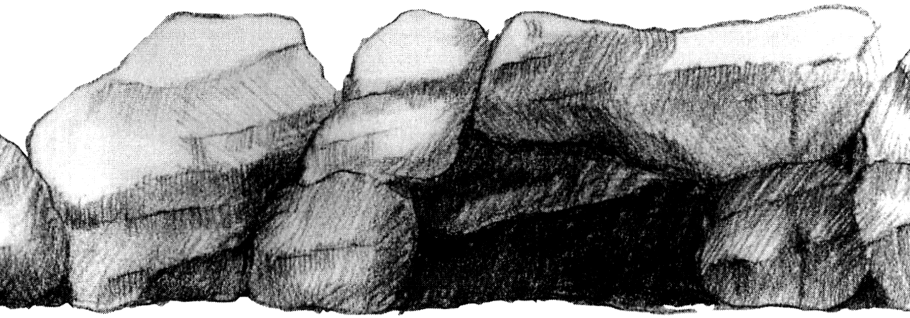
ⓐ　母音がないって？　それはすごいわ……でも、これってどういう意味だと思う？

ⓑ　僕もよくわからない。おかしな数の規則が二つだろ。車輪が発明されてから古くさくなっちゃった古い算数の方法かなあ。明日考えてみると楽しいかもしれない。でももう日も暮れそうだし、何か食べて寝たほうがよさそうだ。

ⓐ　（指差しながら）「初め、……」

第二章 ──── 記号

　岩にある碑文に書かれている、数を創る規則二つが数式で再現される。アリスの説明による数式化によって、最初の数ゼロと、その次にできる数１と－１ができるところが再現されていく。
記号∅は、要素がない集合である「空集合」を表す。最初の定義が否定形で述べられていることが、空集合で利用できることに留意しておこう。



ⓐ　コンウェイ岩の意味、わかったかもよ。ゆうべ、ずっと考えてたんだ。

ⓑ　僕もだ。でもどうにもならないまま眠っちゃったよ。何だったの。

ⓐ　実はそんなに大したことじゃなかったのよ。困ったのは、ぜんぶ言葉で書かれてるってことよ。同じことでも記号で表せたら、どういうことかわかるわよ。

ⓑ　それって、「新しい数学*」を使って、この古い石碑を解読するってこと？

ⓐ　そうは思いたくないけど、どうもそうらしいわ。ほら、最初の規則が言っているのは、実はすべての数xが、実は二つ一組の集合だってことでしょ。左集合x_Lと右集合x_Rで、

$$x=(x_L, x_R)$$

ってこと。

ⓑ　ちょっと待てよ。砂の上に書くことはないだろ。リュックにまだ紙と鉛筆はあると思うよ。すぐ持ってくる……ほら、これを使えば。

ⓐ
$$x=(x_L, x_R)$$

*新しい数学——集合論を重視して組み立てられた、一時期盛んになった初等・中等の算数・数学カリキュラム

で、このx_Lとx_Rはただの数じゃないのね。数の集合なわけ。で、集合にある数がまたそれぞれ二つ一組の集合で、それが続くってことよ。

ⓑ 待て待て。アリスの書き方じゃ混乱するよ。どれが集合でどれが数なんだか。

ⓐ わかった。数の集合には大文字を使って、数には小文字を使おうか。コンウェイの最初の規則はこうよ。

規則 1

$$\boldsymbol{x = (X_L, X_R)}\text{、ただし}\boldsymbol{X_L \not\geq X_R}$$

つまり、x_LがX_Lにある数で、x_RがX_Rにある数なら、その数はどれも$x_L \not\geq x_R$を満たしていなければならないってことね。$x_L \not\geq x_R$ってのは、x_Lがx_Rより大きくもそれに等しくもないってこと。

ⓑ （頭を掻きながら）まだ僕には進み方が速すぎるみたいだ。アリスはもうわかっちゃってるけど、僕はまだ始めたばかりなんだ。数が二つ一組の数の集合で、その数がまた、それぞれ二つ一組の数の集合で、それがどんどん続くなら、そもそもの最初はどうなるの。

ⓐ 鋭い。でもそこがまさにこのコンウェイ式の美しいと

ころなのよ。X_LとX_Rのそれぞれの要素は前からできていなければならないけど、天地創造の最初の日には、前もって使うべき数はなかったのね。それでX_LとX_Rは空集合だってことになるわけ！

ⓑ　空集合に意味ができるまで長生きするとは思わなかったな。それこそ無から何かを創るってことじゃないか。でも、X_LもX_Rも空集合なのに、$X_L \not\geq X_R$なの？ それ自身と等しくないものをどうやって手に入れるんだろう。

　そうか、わかったわかった。空集合の要素には、空集合の要素より大きいとか、等しいとか、そういうものがないんだね――空集合に要素がないから、言ってることは正しいんだ。

ⓐ　ということで、万事うまく始まって、それがゼロという数だってわけ。空集合を∅で表すと、こんなふうに書けるのよ。

$$0 = (\emptyset, \emptyset)$$

ⓑ　たいしたもんだ。

ⓐ　そして次の日には、左集合や右集合で0を使えるわけ。それでコンウェイは数を二つ手に入れるのよ。

$$-1=(\emptyset, \{0\})^{*} \text{ と } 1=(\{0\}, \emptyset)$$

ⓑ ええっと、合ってるのかな。−1が数であるためには、「空集合のいかなる要素も0より大きくもなく、それに等しくもない」が成り立たなければならないんだね。それから1の方は、「0は空集合のどの要素よりも大きくもなく、それに等しくもない」が言えなきゃなんない。あっ。空集合の要素に大きいも等しいもないからいいんだ。いつか『空集合の特性』という本を書いてやろうかな。

ⓐ きっと完成しないわね。

X_LかX_Rが空なら、$X_L \not\geq X_R$という条件は、相手の集合に何があっても成り立つわよね。つまり、無限にたくさんの数ができるってことよ。

ⓑ そうだね。でもコンウェイの第二の規則はどうなったんだ？

ⓐ それはX_LもX_Rも空でないとき、$X_L \not\geq X_R$かどうかを知るために使うのよ。「より小さいまたは等しい」を定義する規則ってわけ。記号を使うと、

*{ }でくくられているものは集合を表す。{0}は0を要素とする集合という意味。

規則 2

$x \leq y$とは、$X_L \ngeq y$かつ$x \ngeq Y_R$のこと

だってこと。

ⓑ　ちょっと待った。また先へ行き過ぎだよ。ほら、X_Lは数の集合で、yは数だよ。数は二つ一組の集合のことだよね。$X_L \ngeq y$って書いてあるのはどういう意味？

ⓐ　X_Lのすべての要素が、$x_L \ngeq y$を満たすってこと。言い方を換えれば、X_Lの要素には、yより大きかったり、それに等しかったりするものはないってこと。

ⓑ　なるほど。アリスの規則 2 は、xがY_Rのすべての要素より小さいか、それに等しいってことも言ってるよね。岩の文と突き合わせてみよう……

ⓐ　岩の言い方はちょっと違うけど、$x \leq y$は、$y \geq x$と同じになるしかないよね。

ⓑ　うん、そういうこと。ほら、ちょっと待て。この彫った字を見てよ。

● = ⟨:⟩
| = ⟨●:⟩
— = ⟨:●⟩

昨日はこれを解読できなかったんだけど、アリスの書き方でぜんぶはっきりしたよ。縦に2個並んだ点で左集合と右集合を分けてるんだ。きっとアリスので間違いないよ。

ⓐ　わあ、等号もあるじゃない。石器時代の石彫り職人は、━で-1を表したのね。私のより、こっちの方がいいくらいだわ。

ⓑ　原始時代の人を甘く見てたね。連中もややこしい生活をしていて、僕らみたいに頭の体操も必要だったんだ——食べ物や隠れ家を争う必要がないときくらいはね。過去を振り返るときは、歴史を単純にしてしまいすぎなんだな。

ⓐ　そうね。でも振り返るときって、他にやりようがあるかなあ。

ⓑ　言いたいことはわかる。

ⓐ　わからないのはここからなのよ。創造の最初の日に、コンウェイは$0 \leq 0$を「証明」するって言うじゃない。何かがそれ自身より小さいかそれに等しいってことをどうしてわざわざ証明しなきゃなんないの。だってそれ自

身に等しいのはあたりまえじゃないの。それから、二日めには−1が0と等しくないことを「証明」するって言うし。それって証明しなくてもあたりまえじゃない？だって−1は違う数なんだから。

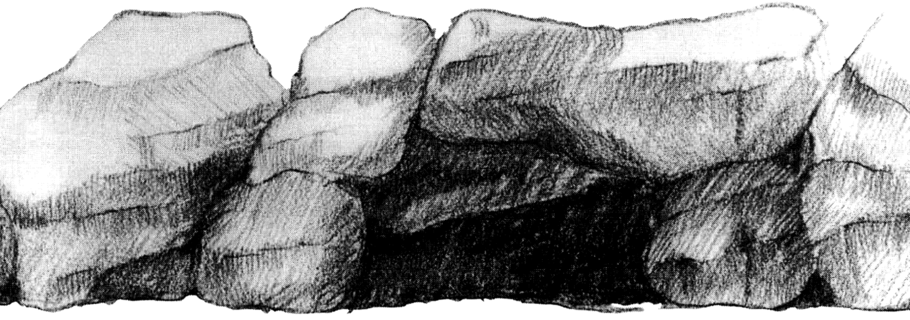
ⓑ ふーん。よくわからないけど、また泳ぎに行こうかな。

ⓐ そうね。いい波が来てるみたいね。それにこんなに集中するのも柄じゃないし。行きましょう。

第三章 ———— 証明

碑文にある言葉、「等しい」が「同様」という緩い意味に解釈し直される。それをふまえ、$0 \leq 0$、$0 < 1$、$-1 < 0$ の証明が確認される。

この章では、「求めたい結論を否定した結論が間違いであることを証明する」という手法（「背理法」）が加わる。



ⓑ　ねえ、アリス、海でひと泳ぎしてたときに思いついたんだけど、僕の訳は正しくないかもしれない。

ⓐ　ええ？　ぜったい大丈夫よ。もうあんなに確かめたじゃない。

ⓑ　それはそうなんだけど、「〜に等しい」と訳した言葉には全然自信がないんだ。もうちょっと弱い意味かもしれない。「〜に似ている」とか「〜と同様」とか。そうすると、コンウェイの第二の規則は「ある数が別の数より小さいまたはそれと同様なのは……」ということになるね。そのうえで、0は0より小さいかそれと同様ってことや、−1は0より小さいが同様ではないとか、そういうことを証明するってこと。

ⓐ　ああそうか。じゃあきっとこういうことよ。コンウェイはその言葉を、抽象的な専門的な意味で使っていて、規則でその意味を定義しなくちゃいけないんだ。だから確かにコンウェイは0は0より小さいかそれと同様ってことを証明したかったのね。自分の定義から、数がそれ自身と「同様」になるかどうか確かめようとしたんだわ。*

* $0 \leq 0$ は右から読むと $0 \geq 0$ でもあるので、$0 \leq 0$ が証明できれば、「0はそれ自身と同様」が証明できたことになる。

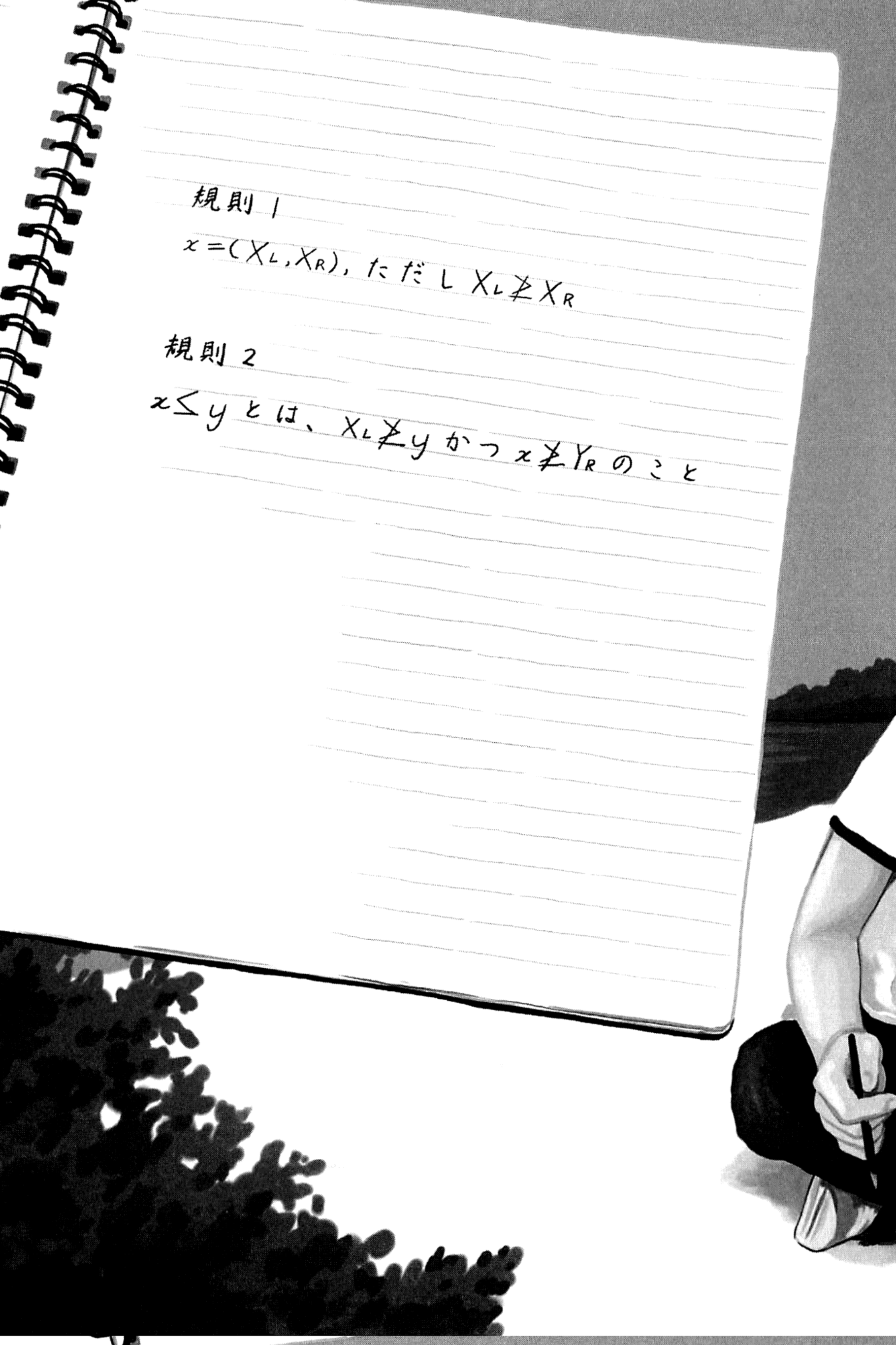
ⓑ それでコンウェイの証明はうまくいくかな？ 規則2* で、空集合の要素は0より大きいか0に似ているものはないことや、0が空集合のどの要素よりも大きくもないしそれに似てもないことを示さなきゃ……確かにいける。また空集合ってことが利いてる。

ⓐ コンウェイはどうやって−1が0と同様じゃないことを証明できるか、ますます知りたくなるわね。私に考えつく方法は、0は−1「より小さいかそれと同様」ではないってことを証明することだけ。つまり、規則2があって、ある数が他の数より小さいかそれと同様かどうかはわかるから、xがy「より小さいかそれと同様」ではないとすれば、それはyよりも小さくないし、yと同様でもないのよ。

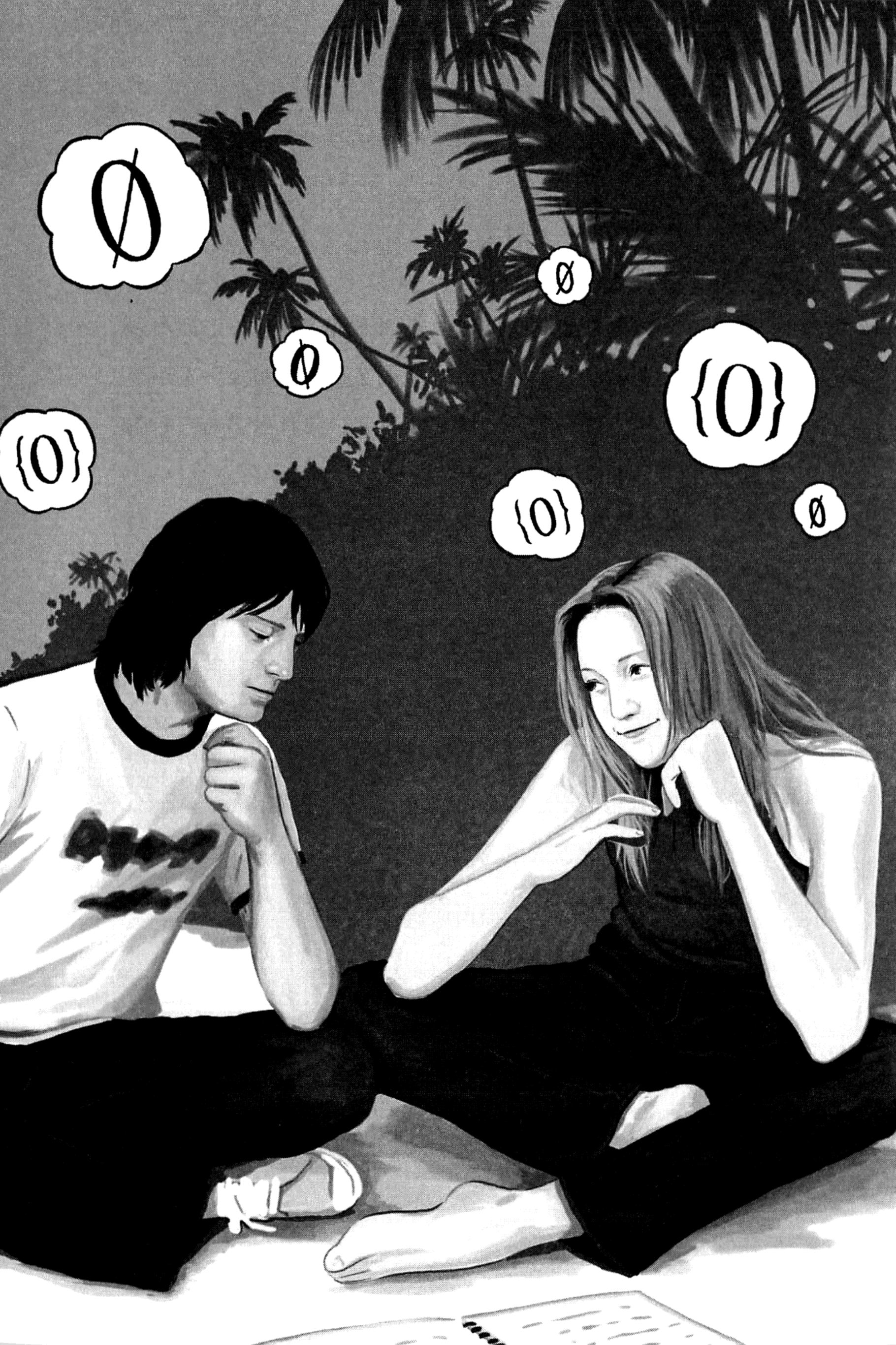
ⓑ なるほど。$0 \leq -1$が間違いだってことを証明したいわけだ。これは規則2で、$x = 0$と$Y_R = \{0\}$にしたものだから、$0 \leq -1$になるのは、$0 \ngeq 0$のときに限られるってことだね。でも0は≥ 0だってことはわかっているから、$0 \nleq -1$。コンウェイは正しかった。

ⓐ コンウェイは−1と1でも調べたんじゃないかなあ。

*規則2 $x \leq y$とは、$X_L \ngeq y$かつ$x \ngeq Y_R$のこと



規則1
$x=(X_L, X_R)$, ただし $X_L \not\geq X_R$
規則2
$x \leq y$ とは、$X_L \not\geq y$ かつ $x \not\geq Y_R$ のこと


∅
∅
∅
{0}
{0}
{0}
∅

岩にはそのことは何も書いてないけど、そうしたと思うわ。規則がともかく使えるなら、-1が1より小さいことだって証明できるはずよ。

ⓑ 考えてみようか。-1は$(\emptyset,\{0\})$で、1は$(\{0\},\emptyset)$だから、やっぱり空集合が使えて、規則2で$-1\leq 1$になるよ。逆に$1\leq -1$ってのは、規則2から、$0\not\geq -1$かつ$1\not\geq 0$と言っているのと同じだけど、これはどちらも偽だってことはわかっているから、$1\not\leq -1$だ。$-1<1$になるしかないね。コンウェイの規則はうまくいっているみたいだ。

ⓐ そうね。でもここまではほとんどぜんぶの論証で空集合を使ってきたから、規則がどういうことか、ぜんぶはまだはっきりしていないわね。ねえ、気がついてた？ 今まで証明したことはほとんどぜんぶ、「XとYが何かの数の集合なら、$x=(\emptyset,X)$と$y=(Y,\emptyset)$は数で、かつ$x\leq y$である」って形に収まっているのよ。

ⓑ それはすごい。僕が二つの場合で使ったパターンを見るだけで、アリスは無限にたくさんのことを証明したってことだね。それって抽象化とか一般化とか何とかのこ

とじゃない？　でも、xは厳密にyよりも小さいってことも証明できる？　単純な場合にはすべてあてはまったから、一般にも言えるんじゃないか。賭けてもいいよ。

ⓐ　なるほど……でもだめね。XとYが両方とも空集合のときは言えないわ。だって、そうすると、$0 \not\geq 0$ってことになっちゃう。でもそれ以外は面白そうね。Xが空集合で、Yが空集合じゃないときのことを見てみようか。0は$(Y,\emptyset)$よりも小さいは言える？

ⓑ　そうだとしたら、$(Y,\emptyset)$は「正の」数と呼ぶよ。コンウェイがゼロは正の数と負の数を分けると言ってたのは、きっとそういうことだよ。

ⓐ　そうね。でも見て。規則2からすると、Yに0より大きいか、それと同様の要素がないときだけは、$(Y,\emptyset) \leq 0$になるのよ。すると、たとえば、Yが$\{-1\}$という集合なら、$(Y,\emptyset) \leq 0$よね。正の数が≤ 0なんてことになってほしい？

ⓑ　そうか。つまり、$(Y,\emptyset)$が正になるのは、Yがゼロかそれよりも大きい数を含んでいるときだけだってことだね。その通りだと思うよ。でも少なくとも岩に書いてあ

ったことは、これでぜんぶわかったわけだ。

ⓐ　途切れたところまではね。

ⓑ　それって……

ⓐ　三日めはどうなったのかなあ。

ⓑ　そうそう。それが計算できるはずなんだ。規則がわかったんだもんね。三日めを考えると楽しいかもね。でもお昼を先にしよう。

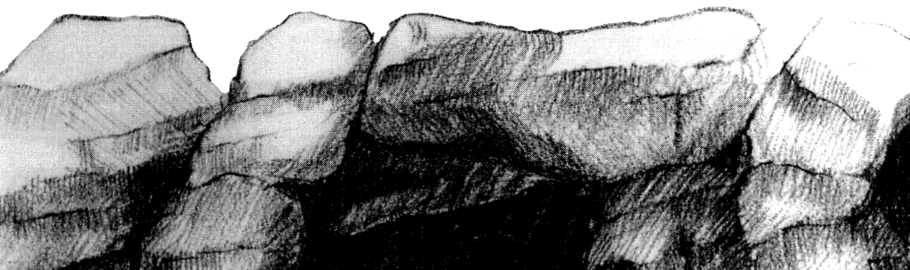
ⓐ　魚でも捕まえた方がいいわよ。乾燥肉の蓄えがなくなってきてるんだ。私は椰子の実でも探してみよっと。

第四章 ——— 悪い数

数に大小ができた。その順番に並ぶこと、そして「大小」や「同様」の関係は、左集合の最大値、右集合の最小値を考えればわかることが示唆される。

それを示すためには、「推移律」が必要とされる。「$a \leq b$、$b \leq c$なら、$a \leq c$」というものである。

この章では、どの数も、それ以前にできた数から創られることが示される。そして、最初に創られた数（0）があることに依拠する論法（「帰納法」）が加わる。



ⓑ　三日めの問題をずっと考えてたんだけど、めちゃくちゃ難しいことになるんじゃない？　数が増えてきたら、ありうる集合の数もどんどん増えてくるよ。きっと七日めになる前にコンウェイは安息日にしたくなったんじゃないの？

ⓐ　そうね。私も考えてたけど、三日めで17個の数になるわ。

ⓑ　ほんと？　僕は19個見つけた。アリスは二つ見逃したんだね。僕が見つけたのはこれだけ。

⟨:⟩　⟨—:⟩　⟨●:⟩　⟨|:⟩　⟨—●:⟩
⟨—|:⟩　⟨●|:⟩　⟨—●|:⟩　⟨:—⟩　⟨:●⟩
⟨:|⟩　⟨:—●⟩　⟨:—|⟩　⟨:●|⟩　⟨:—●|⟩
⟨—:●⟩　⟨●:|⟩　⟨—●:|⟩　⟨—:●|⟩

ⓐ　石の書き方を使ってるのね。でもどうして⟨:⟩が入るの？　それはもう最初の日に創られてるのに。

ⓑ　新しい数がどう入ってくるか見ようと思ったら、新しいのと古いのとを照合しなきゃならないからだよ。

ⓐ　私が17って言ったのは、**新しい**数だけ考えたからよ。だから三日めの終わりには、実際には20個の数ができ

ることになるわ。ビルはこれを忘れてる。

〈一：1〉

ⓑ （目をぱちぱちさせて）そうだね。ふーん。20 かける 20 で、規則 2 では 400 通りを考えなきゃなんないわけか。すごい量だし、あまり面白そうじゃないな。でも他にすることもないし、答えがわかるまではきっと気になるだろうし。

ⓐ 始めてしまえば、仕事が簡単になる方法も思いつくかもね。

ⓑ うん、そうだったらいいんだけど……

ほら、一つできた。1 は$(\{1\},\emptyset)$よりも小さい。先に $0 \not\geq (\{1\},\emptyset)$ を証明しなきゃなんなかったけど*。

ⓐ 私は別のやり方で試してみたわ。規則 2 は、X_Lの要素をすべて確かめて、それがyより大きくもないしそれと同様でもないことを見なきゃなんないって言ってるけど、そんなにたくさん調べなくてもいいはずよ。X_Lのどの要素でも$\geq y$なら、X_Lで**いちばん大きい**要素は$\geq y$になるはずね。同じことで、xは、Y_Rの**いちばん小さ**

* $1 \leq (\{1\},\emptyset)$とは、 $1 = (\{0\},\emptyset)$と規則 2 により、 $0 \not\geq (\{1\},\emptyset)$かつ $1 \not\geq \emptyset$ のこと。後半は空集合論法で成り立つから、前半が言えればよい。 $0 \geq (\{1\},\emptyset)$として規則 2 に当てはめ、成り立たないことを言う。

い要素と比べればいいだけよ。

ⓑ　うん、そうなるはずだ…… 1 が$(\{0,1\},\emptyset)$よりも小さいことは、僕が 1 は$(\{1\},\emptyset)$よりも小さいことを証明したのと同じに証明できるわけか。X_Lに余分の“0”があるからといって、何も違いはないらしいね。

ⓐ　私が言ったことが正しければ、仕事も楽になるわね。(X_L, X_R)のそれぞれの数が、≤の関係ではすべて、X_Lはそれでいちばん大きい要素に置き換えて、X_Rはそれでいちばん小さい要素に置き換えたようにふるまうってことだから。X_LやX_Rに二つ以上の要素がある数は考えなくてもいいんだわ。挙がった 20 個の数のうち、10 個は省けるのよ。

ⓑ　信じていいかどうかわからないけど、そんなことがいったいどうやって証明できるんだろ。

ⓐ　こういうことが必要らしいわね。

定理 1

$$x \le y \text{ かつ } y \le z \text{ なら、} x \le z$$

すぐには導けそうにないけど、私たちが知っていることとは合ってる*。

*推移律

ⓑ　いずれにしても、正しいはずだよ。コンウェイの数がまともならね。この先もこれでいけると思うけど、コンウェイの規則を使うだけで、いっぺんすっきりと正しいことを示せればすごいよね。

ⓐ　そうね。それに三日めの問題も、たいして手間もかからずに解けることになるし。考えてみようか。どうやったら証明できるか……

ⓑ　蠅がうるさいなあ。集中しようとするときにかぎってこうなんだ。アリス……あ、いい。僕はちょっと散歩してくる。

***

ⓑ　はかどった？

ⓐ　だめね。堂々巡りになっちゃうみたいね。$\not\geq$と$\leq$とが紛らわしいのよ。ぜんぶ否定形で言われていて、信じられないほどもつれちゃうのよ。

ⓑ　もしかして定理１が正しくないんじゃない？

ⓐ　でもこれは成り立たないといけないのよ。待って。それだわ。反証してみようよ。それができなかったら、で

きないことが証明になるわ。

ⓑ　いいんじゃない？——だいたい、正しいことを証明するより、間違ってることを証明する方が易しいからね。

ⓐ　三つの数x, y, zがあって、

$$x \leq y \text{ かつ } y \leq z \text{ かつ } x \not\leq z$$

が成り立つとしましょう。規則 2 から、こんな「悪い数」について、何が言えるかなあ。

ⓑ　言えるのは

$$X_L \not\geq y,$$
$$\text{かつ} x \not\geq Y_R,$$
$$\text{かつ} Y_L \not\geq z,$$
$$\text{かつ} y \not\geq Z_R,$$

で、それから$x \not\leq z$でもあるんだけど、これってどういうこと？

ⓐ　二つある条件のどちらかが成り立たないってことよ。X_Lの中に、$x_L \geq z$が成り立つx_Lがあるか、Z_Rの中に、$x \geq z_R$が成り立つz_Rがあるか、どちらかってことね。このx, y, zについての事実があれば、何か証明できるはず

よ。

❶ x_LはX_Lの中にあるので、yより大きいこともそれと同様ってこともありえない。それをyよりも小さいと言おう。でも$y \leq z$なので、x_Lは……あ、違う。ごめん。数についてまだ証明していないことは使えないんだ。

逆に行ってみよう。$y \leq z$かつ$z \leq x_L$かつ$y \not\leq x_L$ということになっているから、三つ組の悪い数がまたできて、わかったことがまた増えた。でも絶望的なほどややこしくなったみたいだ。

ⓐ ビル、やったじゃない。

❶ やっちゃった？

ⓐ (x, y, z) が悪い数三つなら、二つの可能性があるわ。

その1 —— $x_L \geq z$となるx_Lがある。すると、(y, z, x_L) の三つという悪い数が増える。

その2 —— $z_R \leq x$となるz_Rがある。すると、(z_R, x, y) という三つの悪い数が増える。

❶ でも、まだ堂々巡りじゃない？　あちらでもこちらでもどんどん悪い数が増えてるよ。

ⓐ 違うのよ。どの場合も新しくできた悪い数は、元のよ

りも単純なのよ。一つは前に作られたものよね。どこまでも遡って前の悪い数の集合を見つけることはできないから、悪い数の集合はありえないってことになるじゃない。

ⓑ (明るい表情になって) そうか！ 要するにこういうことか。それぞれの数xはいずれかの日$d(x)$に作られた。三つ組の悪い数(x,y,z)があって、それができた日の和を$d(x)+d(y)+d(z)=n$とすると、アリスの言う二つの場合が成り立って、三つ組の悪い数がまたできる。その日数の和はnよりも小さい。その三つ組の数が、日数の和がもっと小さい集合を作って、以下は同じことってわけだね。でも、日数の和が3よりも小さい三つ組の数はないから、それはありえないわけだ。

ⓐ そのとおり。できた日の和っていうのは、うまい証明の表し方ね。日数の和がnよりも小さい三つ組の悪い数(x,y,z)がないなら、さっきのその1とその2が、日数の和がnに等しいものはないことを示しているのね。これは、日数の和に基づいた帰納による証明だと思うわ。

ⓑ アリスもその言葉もすごいけど、計算が立つのはアイ

デアの方だ。

ⓐ　確かに。でもそのアイデアには名前がいるのよ。そうすれば、次にはもっと簡単に使えるでしょ。

ⓑ　確かに。また次があるってわけだね。

わかった。新しい数学用語にいちいち文句をつける理由もないしね。どういうことか、二人ともわかっているわけだから。僕たちは推移律を証明したってわけか。

ⓐ　（ため息をついて）アマチュア数学者二人にしては悪くないわね。

ⓑ　でも本当はアリスがやったんだ。これから推移律の定理１はアリスの定理と呼ぶことを宣言するよ。

ⓐ　やめてよ。コンウェイがずっと前に見つけたのはわかってるんだから。

ⓑ　でも、それでアリスの創造性が落ちるわけでもないよ。どんな大数学者も、最初は「既知の」結果の束を再発見するところから始めたんだと思うよ。

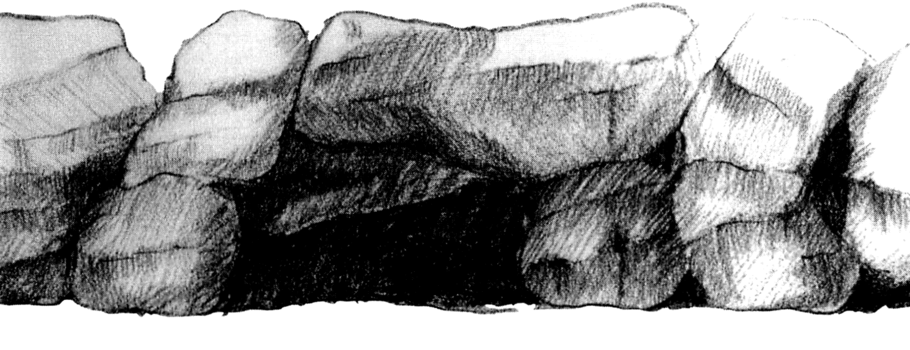
ⓐ　あら大変。偉くなりたいなんて夢見て足元をさらわれないようにしましょう。これで後は遊ぶだけよ。

第五章 ———— 前進

数は左集合と右集合の間になければならないこと、数はそれ自身と同様であること（$x \leq x$）、数には大小か同様か、いずれかの関係がつくことが証明される。つまり、数に順番がつくことが確定する。

そして$x \ngeq y$が、$x < y$であることに置き換えられる。

この章でも、数はその前に創られている数から創られることをふまえた帰納法と、証明したいことの否定を元にすると、すでにわかっていることと矛盾する結果が生じるのを利用する、背理法とが活躍する。



ⓑ　ちょっと思いついたんだけど。二つの数に全然関係がつかないってことってあるかなあ。つまり

$$x \not\leq y \text{ かつ } y \not\leq x$$

ってことなんだけど。一方が別世界にあるとか、次元が別とか、そういうこと。そんなことがあるはずないんだけど、どうやって証明しようか。

ⓐ　前にやったのと同じやり方でやれるんじゃないかなあ。xとyはその意味で悪い数だとすれば、$x_L \geq y$となるx_Lがあるか、または、$x \geq y_R$となるy_Rがある。

ⓑ　なるほど。$y \leq x_L$とするね。そのときは、$x_L \leq x$なら、推移律によって、$y \leq x$になる。そして、$y \not\leq x$と仮定しているわけだ。だから$x_L \not\leq x$になるわけだね。もう一つの$y_R \leq x$の方では、同じ計算で、$y \not\leq y_R$もわかる。

ⓐ　へえ、鋭いわね。あとは、そんなことにはならないことを示すには、ずっと前からそうじゃないかと思ってたことを証明するだけね。すべての数xは、そのX_Lのすべての要素と、X_Rのすべての要素との間になければならないってこと。つまり、

定理 2

$$X_L \leq x \text{ かつ } x \leq X_R$$

ってこと。

ⓑ　証明するのは難しくないはずだよ。さっき出てきた$x_L \not\leq x$が言っているのは？

ⓐ　X_{LL}に$x_{LL} \geq x$となる数x_{LL}があるか、そうでなければX_Rに$x_L \geq x_R$となるx_Rがあるか、どちらかってこと。でも規則 1 があるから、後の方はありえないわね。

ⓑ　いずれ規則 1 を使うことになると思ってた。でもx_{LL}にするとどうなるの。添え字が二つなんて、うれしくないな。

ⓐ　ええっと、x_{LL}はx_Lの左集合の要素ね。x_Lはxよりも前に作られたんだから、帰納法で、少なくとも、$x_{LL} \leq x_L$は前提にできるわ。

ⓑ　で、それから？

ⓐ　そうねぇ、$x_{LL} \leq x_L$は、$x_{LLL} \not\geq x_L$ということで……*

ⓑ　(遮って) そんなのやめてよ――添え字がもっとひどくなってるじゃないか。

ⓐ　そんなこと言わずに手伝ってよ。

*≤の定義（規則 2）による。x_{LL}はx_Lの左集合に属する数、x_{LLL}はx_{LL}の左集合に属する数のこと。

Ⓑ　だから手伝ってるんだよ。そのもじゃもじゃっとした添え字はやめてくれって言ってるんだ。

ⓐ　でも私は……そうね、わかったわ。ちょっと失礼して、脇でちょこちょこっとするわね。$x \leq x_{LL}$で$x_{LL} \leq x_L$なんだから、推移律で$x \leq x_L$よね。こうすれば、よけいな添え字は使わなくてすむわ。

Ⓑ　ああ、それで完璧。これで$x \leq x_L$にはなりっこないね。≤の定義から$X_L \not\geq x_L$ってことになって、x_LがX_Lの要素である以上、それは無理だから*。

ⓐ　いい線ね。でも$x_L \leq x_L$はどうやってわかる？**

Ⓑ　何？　ここまできて、まだある数がそれ自身と同様だってことが証明できてないの？　信じらんない……簡単な証明があるにちがいないのに。

ⓐ　あなたには見えているかもしれないけど、私は当然そうってわけにはいかないと思うわ。ともかく

定理 3

$$x \leq x$$

を証明してみましょ。これは$X_L \not\geq x$かつ$x \not\geq X_R$ってことね。

*X_Lのいずれかの要素とx_Lは同様のはずで、すべてのx_Lについて、$x_L \not\geq x_L$はありえない——はずだが……

**数はそれ自身と同様であることの表現（左から読んだ場合と右から読んだ場合が同時に成り立つことから）。それがまだ証明されていなかった。

ⓑ　妙に定理２に似ているね。でも、また同じところに戻ってる。$x \leq x_L$はありえないってことを示そうとしている。

ⓐ　今度はいいのよ。ビルの論法で、$x \leq x_L$としたら$x_L \not\geq x_L$ってことになって、それは帰納によって、ありえないのよ*。

ⓑ　すばらしい！　つまり定理３が正しいってことで、ぜんぶ収まるところに収まるね。“$X_L \leq x$”という、定理２の半分は証明したし、もう半分も、左右を入れ替えれば、同じ論法で出てくるしかないよね。

ⓐ　それに前に言ったように、定理２は、十分、すべての数に関係がつくことの証明になるわ。つまり、

定理４

$$x \not\leq y \text{ ならば } y \leq x$$

ってこと。

ⓑ　確かに。ほら、今度はもうわざわざ間接的に言わなくてもいいんだ。“$x \not\geq y$”は、「xはyより小さい」と厳密に同じことなんだから。

ⓐ　そうね。これは「xはyより小さいかそれと同様でも、

*前章に出てきた創られた日を考える論法のこと。x_Lよりも創られた日が若い数との間に$x_L \leq x_{LL}$が成り立つことになり、以下同様に、日数がどんどん少なくなるはずだが、これはありえない。

yと同様ではない」と同じね。これで$x \not\geq y$の代わりに

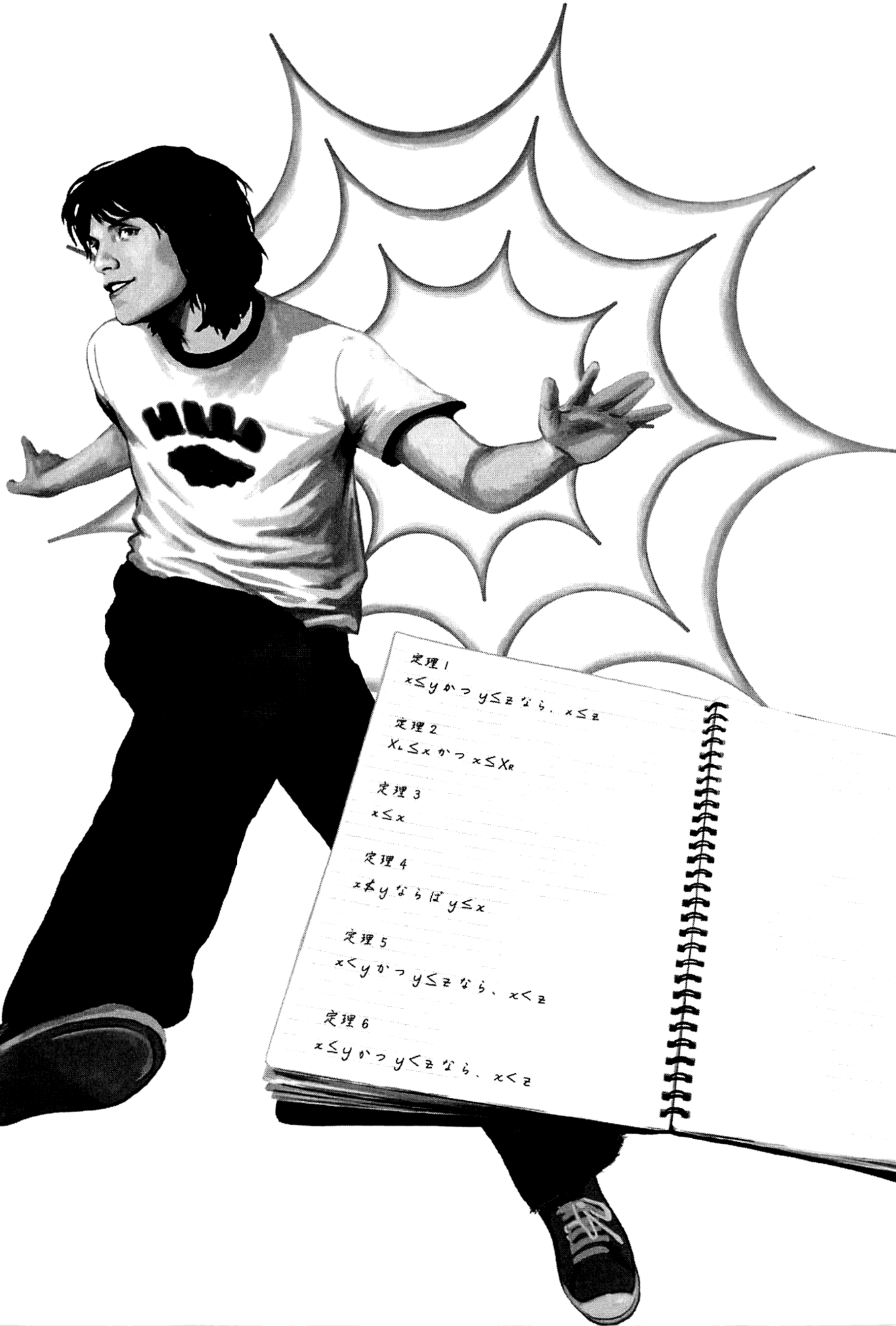
$$x < y$$

と書いてもよくて、元の規則1と規則2も、見え方がずっと良くなるわ。どうしてコンウェイはそういうふうに定義しなかったのかしら。もしかして、「より小さい」の意味を定義するために第3の規則が必要になるからかもしれないわね。コンウェイとしてはたぶん、規則の数を少なくしておきたかったのよ。

ⓑ　二つの異なる数が、互いに同様になることがあるかなあ。つまり、X_LがY_Lと同じ集合でないとき、$x \leq y$と$x \geq y$が両方成り立つようにできるかなあ。

ⓐ　もちろんよ。お昼の前に似たようなのを見たわ。おぼえてない？　$y = (\{-1\}, \emptyset)$のとき、$0 \leq y$かつ$y \leq 0$がわかったじゃない。それに$(\{0,1\}, \emptyset)$は、$(\{1\}, \emptyset)$と同様ってことになると思うわ。

ⓑ　そうだね。$x \leq y$かつ$x \geq y$の場合は、xとyは確かに実際的には等しいんじゃないかと思うよ。推移律から、$x \leq z$になるのは、$y \leq z$の場合だけだということがわかるから。これは交換可能だよ。


定理 1
$x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら、$x \leq z$
定理 2
$X_L \leq x$ かつ $x \leq X_R$
定理 3
$x \leq x$
定理 4
$x \not\leq y$ ならば $y \leq x$
定理 5
$x < y$ かつ $y \leq z$ なら、$x < z$
定理 6
$x \leq y$ かつ $y < z$ なら、$x < z$

ⓐ　他にもあるわよ。推移律は他にもう二つできるの。つまり、

定理 5

$$x<y \text{ かつ } y\leq z \text{ なら、} x<z$$

定理 6

$$x\leq y \text{ かつ } y<z \text{ なら、} x<z$$

ってこと。

ⓑ　おみごと——確かにこれは二つとも、“$x<y$”が“$x\ngeq y$”と同等だと考えれば、定理 1 からすぐに出てくるね。定理 5 と 6 を証明するには、定理 2 も 3 も 4 も使わなくていいんだ。

ⓐ　わかる？　証明したことをぜんぶながめると、ほんとにすごいじゃない。これだけのことがコンウェイの二つの規則から出てくるなんてびっくりするわ。

ⓑ　アリスにこんな面があったなんてね。もう女に数学はできないなんて言わせないってか。

ⓐ　あらあら、どうもありがと。

ⓑ　変なことを言っているのはわかってるつもりだけど、こんな創造的なことをアリスと考えてると、なんだか興

奮してきたみたいだ。こんなに頭を使うと、肉体的な欲望なんてスイッチが切れるって思うのかもしれないけど——ここんとこ、ずっとこんなことになってなかったね。

ⓐ　ほんとのことを言うと、私も感じてなかったんだ。

❶　日が沈んでる。昔買ったポスターみたいだ。見てよ、あの海。

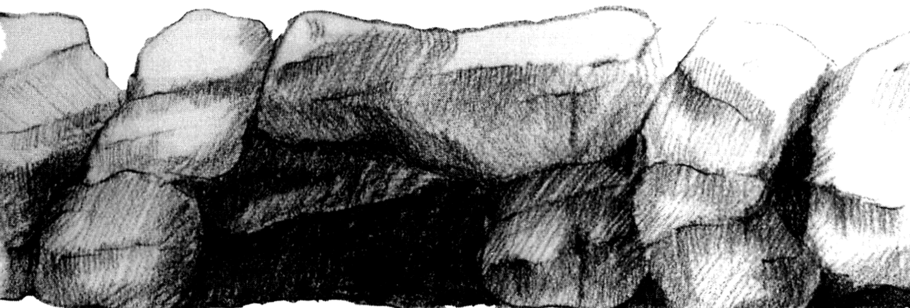
ⓐ　（走りながら）行きましょ。

第六章———第三日

三日めにできあがるという数を、ふたりは考えている。

まず、左右の集合の中身をそれぞれさらに左右に拡張していっても、数としては変わらないことが証明される。次に、第n日までにできあがった数から、第（$n+1$）日にできあがる数のそのできる過程が類推され、証明される。

ここでも、先に創られている数があらかじめ決まっていること、が利用される。この章から、「または」を表す　という記号が活躍を始める。



ⓑ　なんだか、全然眠れなかったよ。

ⓐ　私も。コーヒーで目を覚ましてるっていうんじゃなくて、ほんとにすっきり目が覚めたらすてきよね。

ⓑ　昨日はどこまでいったんだっけ。頭がぼおっとして、数学のことはぜんぶ忘れる前。

ⓐ　（にこにこして）コンウェイの数が、おなじみの数と同じようにふるまうことを証明したところまでよ。最小から最大へ、一列に並べられて、どの数も左側にある数よりも大きくて、右側にある数よりも小さくなるのよ。

ⓑ　本当に証明したの？

ⓐ　そうよ。ともかく少なくとも、同様ではない数は一列に並ぶってことはね。定理 4 があるからよ。新しく数を創っても、それは他の数の間に収まらなきゃなんないの。

ⓑ　これで三日めにどうなったか計算しやすくなるはずだね。20×20 通りの計算がぐっと少なくなるから。定理 2 と 3 から、

⟨:−⟩ < − < ⟨−:●⟩ < ● < ⟨●:|⟩ < | < ⟨|:⟩

になって、七つの数がもう収まっているわけだから、他の数はここにはめ込むだけだ。

ほら、話が簡単になったんだから、クロスワードパズルよりはずっと面白いよ。

ⓐ　たとえばこんなこともわかってるわね。

〈ー：｜〉

は、ーと｜の間のどこかにあるってこと。真ん中の要素0と照らし合わせて確かめましょ。

ⓑ　ふむ。これは≥0かつ≤0なわけだから*、規則2に従って、0と同様になるしかないね。昨日も言ったけど、実質的にこれは0に等しいわけだから、忘れていいんだ。これで八つ片づいた。残りは12個だ。

ⓐ　X_LかX_Rの要素が複数ある10通りを除くことを考えましょう。昨日の朝、やろうとしてたことね。昨夜思いついたんだけど、それがうまくいくかもしれない。$x=(X_L, X_R)$が数だとして、他の数の集合Y_LとY_Rをとって、

$$Y_L < x < Y_R$$

*$(\{-1\},\{1\}) \leq 0$とは、$-1 \ngeq 0$かつ$(\{-1\},\{1\}) \ngeq \emptyset$でこれは成り立つ。また$0 \leq (\{-1\},\{1\})$とは、$\emptyset \ngeq (\{-1\},\{1\})$かつ$0 \ngeq 1$で、これも成り立つ。したがって$(\{-1\},\{1\}) \leq 0$かつ$(\{-1\},\{1\}) \geq 0$。

としましょう。すると、xは、

$$z=(Y_L \overset{*}{\cup} X_L, X_R \cup Y_R)$$

となるzと同様だって言えると思う。つまり、X_LとX_Rの集合を、しかるべき側に数を加えて拡張しても、実際にはxは変わらないってこと。

❺　ええっと、それはもっともな気がするな。規則 1 からすれば、ともかくzは数だね。それはいずれ創られるわけだ。

ⓐ　$z \le x$を示そうとすれば、

$$Y_L \cup X_L < x \text{ かつ } z < X_R$$

を証明しなければいけないわけね。でも、今度は易しいわ。もう$Y_L < x$、$X_L < x$、$z < X_R \cup Y_R$なのは、定理 2 からわかってるもの。

❺　同じ論法で、左と右を入れ替えれば、$x \le z$がわかる。アリスの言うとおりだ。

定理 7

$$\boldsymbol{Y_L < x < Y_R} \textbf{なら、} \boldsymbol{x \equiv (Y_L \cup X_L, X_R \cup Y_R)}$$

は成り立つ。("$x \equiv z$" と書いて、xはzと同様、つまり$x \le z$かつ$z \le x$のことを表すことにするよ。)

*∪ 「または」を表す

ⓐ　それこそ私が言おうとしたことを証明してるわ。たとえば

⟨—●:|⟩≡⟨●:|⟩,　　⟨:—●⟩≡⟨:—⟩

やなんかね。

❶　残りは二つ、⟨—:⟩と⟨:|⟩だ。

ⓐ　それがなんと、定理７がどちらにもあてはまるのよ。$x=0$ にするとね。*

❶　頭いい。これで三日めはぜんぶ分析できた。前に挙げた三つの数だけが本当に別の数だったわけだ。

ⓐ　その次の日からも同じことが言えるんじゃないかと思うんだけど。n日の終わりの異なる数が

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m$$

だとしましょう。すると、第$(n+1)$日に創られる新しい数だけを挙げると

$$(\emptyset, \{x_1\}), (\{x_1\}, \{x_2\}), \cdots, (\{x_{m-1}\}, \{x_m\}), (\{x_m\}, \emptyset)$$

になるんじゃないかな。

❶　すごいね、アリスは。これが証明できれば、一発で無限に何日でも解決だよ。神様よりも先へ行くことになる

*$(\{-1\}, \emptyset)$について言えば、$Y_L < x < Y_R$ を $Y_L \not\geq x$, $x \not\geq Y_R$ に読みかえると、$-1 \not\geq 0$, $0 \not\geq \emptyset$ が成り立つので、$0 \equiv (\{-1\}, \emptyset)$が言える。

よ。

ⓐ　でも証明できないかもよ。

ⓑ　ともかく、特別な場合をいくつか試してみよう。たとえば、$(\{x_{i-1}\},\{x_{i+1}\})$という数*が得られたらどうなるかな。他のどれかと同様でなければならないはずだけど。

ⓐ　そうね、x_iと同様だわ。定理７があるもの。ほら、X_{iL}のそれぞれの要素が$\leq x_{i-1}$で、X_{iR}のそれぞれの要素が$\geq x_{i+1}$よね。だから定理７から、

$$x_i \equiv (\{x_{i-1}\} \cup X_{iL}, X_{iR} \cup \{x_{i+1}\})^{**}$$

になるわ。それからまた定理７によって、

$$(\{x_{i-1}\},\{x_{i+1}\}) \equiv (X_{iL} \cup \{x_{i-1}\},\{x_{i+1}\} \cup X_{iR})^{***}$$

で、推移律によって、$x_i \equiv (\{x_{i-1}\},\{x_{i+1}\})$になるね。

ⓑ　（頭をふりふり）見事だ、ホームズ。

ⓐ　初歩的なことだよ、ワトソン君。前提から導いただけだ。

ⓑ　添え字はきれいじゃないね。でも今回は見逃そう。$i<j$なら、$(\{x_{i-1}\},\{x_{j+1}\})$という数はどうなる？****

ⓐ　（肩をすくめて）それを訊かれるんじゃないかと思っ

*先の第$(n+1)$日に新しくできる数は、第n日までにできた数の２つの隣り合う数の「間」にできた。ここで$i-1$と$i+1$を考えたのは、１つとびの数どうしの「間」を考えている。

**定理７を$y \equiv (\{x_i-1\},\{x_i+1\})$として考えている。

***少々ややこしいが、定理７の$x \equiv (\{x_i-1\},\{x_i+1\})$, $y \equiv x_i = (X_{iL}, X_{iR})$と考えている。$Y_L = X_{iL}$, $Y_R = X_{iR}$と考えていることに注意。

****さらに、ある数のx_iの１つ前と、x_iより大きい別の数x_jの次の数との「間」を確かめようとしている。

てたんだ。わかんない。

ⓑ　X_Lのそれぞれの要素が$\leq x_{i-1}$で、X_Rのそれぞれの要素が$\geq x_{j+1}$になるような数xがあれば、アリスの論法がそのまままきれいに成り立つよ。

ⓐ　ああ、そのとおりね。それは気がつかなかった。でも、間にある$x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j$という要素がじゃましたりしない？

ⓑ　するかもしれないけど……いやそんなことはない。わかったぞ。xを$x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j$の一つとしよう。その$x$が先に創られたとするのね。すると、$X_L$と$X_R$は、$x_i$から$x_j$の数はどれも含むことができない*。だから$(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}) \equiv x$。

ⓐ　まあ。ご褒美にキスしたげる。

***

ⓑ　（にこにこして）問題はまだ完全には解けてないよ。$(\emptyset, \{x_{j+1}\})$とか、$(\{x_{i-1}\}, \emptyset)$とかの数を考えなきゃ。でも先の方は、$x_1, x_2, \cdots, x_j$のうち最初に創られた数になるし、後の方は、$x_i, x_{i+1}, \cdots, x_m$の中で最初に創られ

*xの左集合にも右集合にも、xより後に創られる数が含まれることはありえない。

た数になる。

ⓐ　先に創られた数が一つに決まらなかったらどうなるの？　つまり、$x_i, \cdots, x_j$のうち複数の数が先にできちゃったらどうするの？

ⓑ　おっと……いや、大丈夫。そんなことはありえない。さっきの証明はまだ言えて、その二つの数が両方とも互いに同様だってことを示してしまう。そんなことはありえない。

ⓐ　やったね。すべての日の問題をいっぺんに解いちゃったわ。

ⓑ　アリスが助けてくれたからだよ。ええっと。四日めには新しい数が８個できて、五日めには16個できて、以下同様だ。

ⓐ　そうそう。第n日がすぎると、$2^n - 1$個の数ができてるわけね。

ⓑ　でもなあ、コンウェイって奴はあんまり頭良くないんじゃない？　だって、同じ結果になるように、もっと単純な規則にしておけばよかったんじゃないの？　数の集合のことをああだこうだ言うことはないんだよ。ぜんぶ

無意味だね。コンウェイは、新しい数は、すでに存在する並んだ数の間か両端にできると言うだけでよかったんだ。

ばかものめ。無限集合に達するまで待て。

ⓐ 何あれ。何か聞こえた？　雷みたいだったけど。

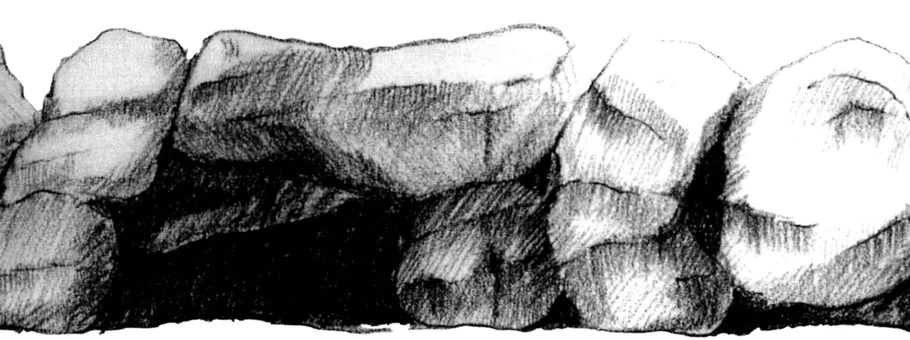
ⓑ もうすぐ雨季になるんじゃないかなあ。

第七章 ——— 発見

ところで、これまでに定義したり比べたりしてきたものは、本当に数なのか？　ふたりは悩む。どうしてそれが「数」なのか？

これが本当に数なのであれば、ただ並べるだけではない操作、つまり四則などの演算が可能ではないか。碑文には続きがあって、そのことが書かれているのではないか？

ふたりは、碑文の続きが書かれているはずの岩を探しに行く……。



ⓐ　ねえ、岩に書いてあったことはぜんぶ解決したんだけど、足りないものがたくさんあるんじゃないかなあ。そんな気がしてしまうんだけど。

ⓑ　どういうこと？

ⓐ　三日めにあったことがわかって、新しく四つの数ができたのよね。でも、コンウェイがそれをどう呼んだかはわからないわ。

ⓑ　ええっと、一つは1より大きくて、だからそれは「2」と呼んだんじゃないかなあ。0と1の間のやつは、$\frac{1}{2}$と呼んだのかもね。

ⓐ　実はそういうことじゃないのよ。本当に悩んでいるのは、どうしてそれが数なのかってこと。数であるためには、足したり引いたり、そのたぐいのことをしなくちゃいけないわよね。

ⓑ　（険しい顔をして）なるほど。コンウェイが何かもっと規則を立てていて、岩の割れた先の部分に書いてあって、それが数をほんとの数にしてたんじゃないかと思ってるんだね。僕たちが手にしているのは一列にきちんと並んだひとまとめの対象だけど、それでできることは何

もないってわけか。

ⓐ　コンウェイがしたことが推測できるほど私に透視能力があるとは思わないけど——何かしていればのことだし。

❺　つまり行き詰まりってことか。岩の欠けた部分が見つからないことにはね。最初の部分をどこで見つけたかもおぼえてないよ。

ⓐ　私はおぼえてるわよ。戻りたくなるといけないからと思って、あった場所にちゃんと印をつけておいたんだ。

❺　まったく、アリスがいなかったら、僕はどうすればいいんだろう。さあ、行ってみよう。

ⓐ　ちょっと待ってよ。先にお昼にしない？

❺　いいよ。夢中になって食べることも忘れてたよ。何かちょっと食べてから、発掘だ。

***

ⓐ　（掘り返しながら）ねえ、ビル。これじゃだめなんじゃないかなあ。砂の下の土はけっこう固いわ。専用の道具がいるんじゃない？

ⓑ そうだね。このナイフでただ掻き出すだけじゃあ、きりがないよね。おや？ 雨まで降ってきた。急いでキャンプに戻った方がいいんじゃない？

ⓐ 見て。向こうの崖のところにほら穴があるわよ。あそこで嵐をやりすごしましょう。ほら、土砂降りになってきたわ。

***

ⓑ ここは暗いね。痛っ！ 何かにけつまづいたよ。よりにもよって……

ⓐ ビル、あったわよ。つまづいたのがコンウェイ石の残りよ。

ⓑ（顔をしかめて）まったくもう。アリスの言うとおりみたいだ。とんでもない運命だよ。僕の爪先は、他の部分ほど喜んでないけどね。

ⓐ 読める？ ほんとに探してたものかしら。それとも何か全然別のもの？

ⓑ ここじゃ暗くてよく見えないな。一緒に外の雨の中に引きずり出してよ。雨水で泥を洗い流せば……

いいぞ、「コンウェイ」とか「数」って単語がわかる。これはぜったい、探していたやつだ。

ⓐ　ああよかった。仕事がはかどるわね。助かったわ。

ⓑ　必要な情報はぜんぶここにある。でも僕はほら穴に戻るよ。こんなきつい雨の中にはあんまり長くいられないよ。

ⓐ　（後を追って）そうね。びしょぬれになっちゃう。

***

ⓑ　こんな数学がどうしてこんなにわくわくするんだろうね。学校でやったときは退屈だったのに。ランダウ先生*の授業をおぼえてる？　あれはほんとにいやだった。定理、証明、補助定理、注意、定理、証明、うんざりしたよ。

ⓐ　おぼえてるわよ。眠らないでいるのが大変だったわ。でもほら――私たちの美しい発見って、同じことじゃない？

ⓑ　そうだね。こんなおかしな欲求が出てきちゃったよ。クラスのみんなの前に立って、僕たちの成果を発表する

*広く用いられた教科書「解析学の基礎」を書いたドイツの数学者をふまえる。

んだ。定理、証明、補助定理、意見。すらすらと発表して、誰もどうしてこんなことになったのか、見当もつかないし、みんなとても感心するだろうね。

ⓐ それか、退屈するかね。

❻ それはある。わくわくとか美しさとかって、発見するからあるんで、聞いててもだめだよね。

ⓐ でもこれは美しいわ。ビルの発見の話を聞くのだって、自分の話と同じくらい面白いし。ほんとの違いっていったい何なのかなあ。

❻ それもそのとおりだね。僕もアリスがしたことがほんとによくわかったもんな。自分でも同じ問題で苦労してたからだね。

ⓐ 前は退屈だったのは、全然参加してなかったからよ。他の人がやったことを吸収しろって言われてただけだったものね。それに知っている範囲では、とくにどうってこともなかったし。

❻ これからは数学の本を読むときは、答えを見る前に、どういうふうに出てくるか、自分で計算してみるよ。自分で考えつかなくても、証明の美しさはわかると思う

よ。

ⓐ　それにみんなどんな定理が出てくるか考えてみるべきだとも思うわね。せめて、そもそも誰かがそんな定理を証明しようとするのはどういうことで、どういうわけかも想像すべきなんじゃないかな。発見した人の立場になって、自分で想像すべきなのよ。創り出す部分が答えを導き出す部分よりも面白いのよね。問題に対する立派な答えを探すだけに気をとられるんじゃなくて、いい問題をどうやって見つけるかをおぼえることの方が大事なのね。

ⓑ　いいこと言うね。先生には、「xを証明せよ」じゃなくて「xについて面白いことを探せ」みたいな問題を出してほしいよね。

ⓐ　そのとおりだわ。でも先生は保守的だから、宿題を忠実に機械的にやってしまう「がりがり」タイプの学生にいやがられるのが心配なんだわ。それに、誘導なしに問題を出して、その答えの採点をするなんて余計に手間がかかる仕事だってしたくないだろうし。

伝統的なやり方は、創造的な面を大学院の最後の段階

まで先延ばしにすることなのね。十何年も、学生は試験の技術を教わって、大学院に入って十分試験に通ったら、突然、独創的なことをしろって言われるのよ。

ⓑ　確かに。ほんとうに独創的な学生でも、そんなに長くかかったらうんざりしちゃってる奴も多いんじゃないかな。

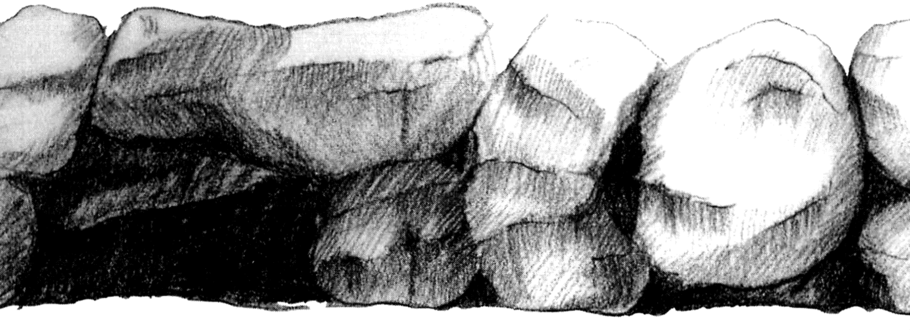
ⓐ　あら、それはわからないわよ。独創的なら、制度を楽しむ方法も見つけられるかもね。さっき言ってたみたいに、自分で課題を見つけるのよ。それで伝統的な授業でも我慢できて、もしかしたら楽しいのかも。

ⓑ　アリスはいつも楽天的だ。ちょっとばら色に考えすぎるんじゃない？　でもほら、雨がやんだ。岩をキャンプまで引きずって帰って、何て言っているか、見てみよう。

第八章 ―――― 足し算

碑文の後半部が書かれている岩が見つかった。そこに書かれていたのは、やはり足し算、負の数、引き算、掛け算の規則だった。しかし当面のこととして、足し算の規則と負の数の規則は数式で表現される。

これらの規則を適用して、すでに見つかっていながら、0、1、−1以外の、まだ具体的にどんな数なのかが確定していない数の正体をふたりは確かめていく。



ⓐ　ぴったり合うわね。これで文章はぜんぶ手に入ったみたい。何て書いてるの？

ⓑ　こちらはちょっと解読しにくいよ。よくわからない言葉がいくつかあってね。でもこんな感じだと思う。



……日である。コンウェイは言った。「数は次のように足すものとせよ。二つの数の和の左集合は、それぞれの数の左の部分部分すべてと相手の数との和になる。右集合も同じようにして、右の部分部分から、それぞれその同類に従ってできる」。コンウェイはすべての数にゼロを足しても変わらないことを証明し、足し算がうまく行くことを見た。夕べがあり朝があった。第三の日である。

コンウェイは言った。「負の数は、その集合として、その数の反対の集合の負をもつとせよ。引き算は負の数の足し算とせよ」。かくしてそうなった。コンウェイは引き算は足し算の逆であることを証明し、それを良しとした。夕べがあり、朝があった。第四の日である。

コンウェイは数どもに言った。「産めよ、増え（マルティプライ）よ。ある数の一部をもうひとつの数に掛け（マルティプライ）、第一の数ともう一方の数の一部との積に加えよ。そして、部分どうしの積を引け。ありうる場合すべてについてこれをなせ。部分どうしが同類なら、積の左集合に数ができ、部分どうしが反対の類のときは、右集合の数ができるとせよ」。コンウェイは、どの数も「いち」を掛けても変化しないことを証明した。夕べがあり、朝があった。第五の日である。

すると見よ！　数は無限に多くの日の間創られ、宇宙そのものが現れた。夕べがあり、朝があった。第ℵの日である。

そしてコンウェイは自ら定めた数の規則を見渡し、実に実に良くできているとした。そしてコンウェイは規則に符号、級数、商、根の規則たれと命じた。

それから無限大よりも小さい無限大の数が現れた。何種類もある無限大の日数が、いろいろな序列の無限大をもたらした。

これでぜんぶだ。

ⓐ なんて変な終わり方。それに「第アレフの日」って何なの？

❺ ていうか、アレフというのはヘブライ語の文字で、それだけ書いてあるんだ。ほら、ℵ。無限大のことを言ってるらしい*。さあがんばろう。きつい相手だよ。何を言っているかも簡単にはわからなさそうだ。

ⓐ 夕御飯つくるから、ぜんぶ書いといてくれる？　多すぎて暗記できないわ。読めないし。

❺ わかった。僕も頭で考えるよりははっきりさせられるだろうし。

＊＊＊

ⓐ 変ねえ。三日めに四つの数が創られたことが書かれてないわ。コンウェイがそれをどう呼んだか知りたいのに。

❺ 足し算と引き算の規則を試してみたら、その数が何かわかるのかも。

ⓐ そう、足し算と引き算の規則がわかれ**ば**ね。足し算の

*様々な大きさの「無限」を考えた数学者カントールが、無限を表すために用いた記号。

規則を記号に置き換えられるか見てみましょう。何を言っているか見るのよ……「同類」ってのが、左は左と、右は右とってことを言っているにちがいないわ。これどう思う？

規則 3

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=((\boldsymbol{X_L}+\boldsymbol{y})\cup(\boldsymbol{Y_L}+\boldsymbol{x}),(\boldsymbol{Y_R}+\boldsymbol{x})\cup(\boldsymbol{X_R}+\boldsymbol{y}))$$

❺ 何か恐ろしげだな。この規則はどういう意味？

ⓐ $x+y$の左集合を得るためには、x_LをX_Lにある数として、x_L+yの形をした数をぜんぶとって、y_LをY_Lにある数として、y_L+xもぜんぶとるのよ。右集合も、右の部分部分から、「同じようにして」とるの。

❺ わかった。xの「左の部分部分」というのは、X_Lの要素のことか。アリスの記号による定義は、確かに文章の定義と合ってるみたいだ。

ⓐ 意味もわかるわ。だって、どのx_L+yも$x+y_L$も$x+y$よりも小さいはずよ。

❺ わかった。試してみて、どうなるかやってみるよ。アリスが規則 3 と言ったのもわかるね。

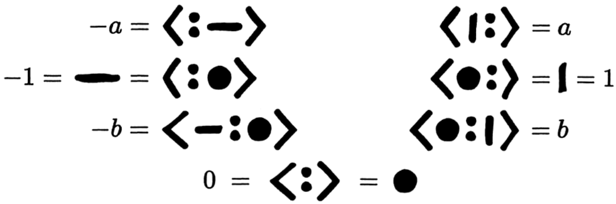
ⓐ 三日めが終わると七つの数ができるわけね。0 と 1 と

−1とa, b, c, dね。

❺　いや、左右対称を考えてこう言えばいいと思うよ。

$$-a < -1 < -b < 0 < b < 1 < a$$

つまり、



ってこと。

ⓐ　すごい。きっとそのとおりよ。だってコンウェイの次の規則は

規則 4

$$-x = (-X_R, -X_L)$$

だもの。

❺　そうか。いいぞ——これで足し算が始められる。こんな感じ。規則3からすると、1+1は何？

ⓐ　ビルはそれをやって。私は$1+a$をやるわ。

❺　いいよ。$(\{0+1, 0+1\}, \emptyset)$ができるね。0+1は$(\{0+$

0}, ∅)で、0+0は、(∅, ∅)=0だ。ぜんぶぴったり収まって、1+1=({1}, ∅)になって、これは=aだ。思ったとおり、aは2になるしかないね。

ⓐ　おめでとう。世界一長い1＋1が2であることの証明ってわけね。

❺　もっと短い証明を見たことあるの？

ⓐ　実はないけど。ほら、ビルの計算がこっちにも使えるわ。1+2=({2}, ∅)ができる。四日めまで作られない数よ。

❺　それを「3」と呼ぼう。

ⓐ　やったね。だから規則3はうまくいくのよ。bが$\frac{1}{2}$かどうか、$b+b$を計算して確かめてみましょう……

❺　ふむ。変だぞ。({b},{$b+1$})になるけど、これはまだできてない。

ⓐ　それに$b+1$は({b,1},{2})で、これは({1},{2})と同様の数で、これは四日めにできるのよ。だから$b+b$は五日めに出てくるの。

❺　$b+b$はまだ名前を知らない別の数に等しいなんてこと言わないでよ。

ⓐ　行き詰まったのかなあ。

ⓑ　できている数をすべて計算する方法を教えてくれる理論はわかったから、これはできるはずなんだけど。最初の四日分の表を作ってみようか。

ⓐ　ええ？　大変なことになるんじゃない？

ⓑ　そんなことない。実は単純なことさ。見て。

<table>
<tr><td>第1日</td><td colspan="8">0</td></tr>
<tr><td>第2日</td><td colspan="4">−1</td><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><td>第3日</td><td colspan="2">−2</td><td colspan="2">−b</td><td colspan="2">b</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>第4日</td><td>−3</td><td>−(b+1)</td><td>−c</td><td>−d</td><td>d</td><td>c</td><td>b+1</td><td>3</td></tr>
</table>

ⓐ　なるほど。すると$b+b$は$(\{b\},\{b+1\})$で、これは「隣り合わない数」からできるのね……それに私たちの理論は、その間にある数で「最初に作られた」数だと言ってるわ*。

ⓑ　（晴れやかな顔で）それは１のことだ。だって、間にあるのは１とcで、１の方がcよりも前からできてるじゃないか。

ⓐ　するとbは結局$\frac{1}{2}$ね。でも数としての値はあと二日し

＊６章の$(\{x_i-1\},\{x_j+1\})$に関する議論を参照のこと。

ないとまだはっきりしないってわけか。あんなわずかな規則から証明できることってすごいわね——みんな全体できちっとつながってて、唖然としちゃうわ。

❺ dは$\frac{1}{3}$で、cは$\frac{2}{3}$だよ。間違いないね。

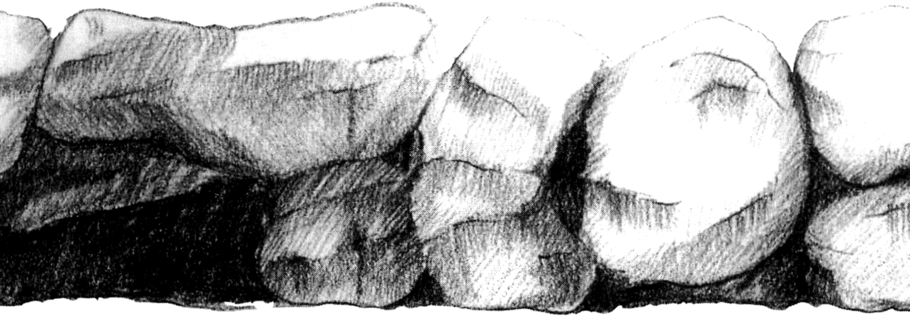
ⓐ でももう日も暮れそうだわ。一晩寝て明日にしましょ。時間はたっぷりあるんだし、もうくたくただわ。

❺ （ぶつぶつと）$d+c=$…わかった、おやすみ。

第九章 ———— 答え

ふたりは、新しくできる数の解釈のしかた、規則に定められた足し算の意味に考えを巡らせ、検討する。そのうち関連するある定理が得られる。また、「数に 0 を足しても変わらない」という、コンウェイが碑文に書いていたことも証明していく。

なお、空集合には要素がないので、空集合の要素に何を足そうと得られるのはやはり空集合である。そこに留意しておくこと。



ⓐ　もう起きてる？

ⓑ　ひどい夜だったよ。ばたばた寝返りをうちどおしで、頭の中は堂々巡りしてた。いろいろと証明して、論理的演繹をしてる夢を見たんだけど、目が覚めるとぜんぶばかばかしいことだったんだ。

ⓐ　この数学は結局、私たちむきじゃないのかもね。昨日はとても楽しかったけど――

ⓑ　(遮って) そうそう、昨日は数学でハイになったけど、今日は調子が狂っちゃった。これは僕のシステムからは取り出せないんだ。もっとたくさんの結果を手に入れないと落ち着かないよ。鉛筆はどこ？

ⓐ　ビル、朝ごはんは食べなきゃ。杏(あんず)と無花果(いちじく)があそこにあるわ。

ⓑ　わかった。でもすぐにでも仕事がしたくてたまらないよ。

ⓐ　本当は私もどうなるか見てみたいのよ。でも一つ約束して。

ⓑ　何を？

ⓐ　今日は足し算と引き算だけにするの。掛け算はだめ。

碑文のほかの部分は見るのもだめ。もっと後よ。

ⓑ 了解。掛け算は無期延期にしてしまいたいくらいだ。ものすごくややこしそうだからね。

ⓐ いいわ、以上よ。

ⓑ アリスはほんとに僕にはよくできたひとだ。

ⓐ それはようございました。ゆうべは昨日の朝、すべての数についての問題を、あなたがどうやって解いたかってことを考えてたの。定理として書き出すべき重要な原理じゃないかな。つまり、

定理 8

任意の数yが与えられていて、xが、$Y_L < x$かつ$x < Y_R$という特性をもった最初に作られた数だとすると、$x \equiv y$である。

ⓑ ふむ。それこそ僕たちが証明したことだと思うよ。証明をこの新しい表記で再現できるか見てみよう。$z = (Y_L \cup X_L, X_R \cup Y_R)$という数を立てたよね。それから定理 7 によって、$x \equiv z$になったんだ。けれども、X_Lの要素x_Lには、$Y_L < x_L$を満たすものはない*。x_Lはxよりも前に創られたからね。だから、x_Lはどれも、定理 4 に

*今考えているのは、$(\{b\}, \{b+1\})$のような、すでにわかっている数（ここではx）よりも後からできる数のことで、しかもわかっている数の間にできる数のことである点に留意すること。8 章末の表を参照のこと。

よって、どれかのy_Lについて、$\leq y_L$になる。だから$X_L < y$で、同じようにして、$y < X_R$だ。したがって、定理7によって、$y \equiv z$。

証明を考えるのは簡単だね。もう使うべき手段はすべて手に入ってるんだから。

ⓐ　定理8のいいところは、ゆうべした計算がずっと易しくなることね。$b+b=(\{b\},\{b+1\})$を計算したときも、1は$\{b\}$と$\{b+1\}$の間で最初に作られた数だということがすぐにわかったでしょうに。

ⓑ　ねえ、$c+c$でやらせてみてよ。$b+c$と$1+c$の間にできた最初の数だ。これは$b+1$じゃないといけない。つまり$1\frac{1}{2}$だから、cは$\frac{3}{4}$だ。

ⓐ　dは$\frac{1}{4}$ね。

ⓑ　そのとおり。

ⓐ　一般的なパターンがはっきりしてきたわ。四日たったところでは、≥ 0の数は、

$$0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{3}{2},2,3$$

で、五日たったら、おそらく——

❺ （遮って）

$$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4$$

ⓐ そのとおりよ。証明できる？

❺ ……

できるけど、思ったより簡単じゃないな。たとえば、$f\overset{*}{=}(\{\frac{3}{2}\},\{2\})$の値は$\frac{7}{4}$になるけど、これを計算するためには、$f+f$を計算したんだ。これは3と4の間で作られる最初の数で、「先回りして」それが$\frac{7}{2}$になることを知っていなきゃならなかった。正しい一般的パターンはわかったと思うけど、証明があればいいよね。

ⓐ 四日めに$\frac{3}{2}$を計算したのは、それが$1+\frac{1}{2}$だってことを知ってのことよね。$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$を知ったからじゃないわ。もしかすると、1を足すことが仕掛けかもしれない。

❺ 確かめてみよう……規則3の定義によれば、$0+x=x$として、

$$1+x=((1+X_L)\cup\{x\}, 1+X_R)$$

だね。実際それは正しいんじゃない？　確かに、正の数

*dの次に考える数なのでeとしてもよかったのだろうが、eは暗黙に2と3の間に最初にできる数($\frac{5}{2}$)用に使ったのだろう。あるいは数学でeと言えば決まった定数を指すので、ひとつとばしたのかもしれない。

については$1+X_L$が$\geq x$になる要素をもつようにX_Lを選ぶことが必ずできるから、この場合は簡単にして、

$$1+x=(1+X_L, 1+X_R)$$

になる。

ⓐ　ビル、それよ。ほら見てよ。五日めの最後の八つの数。みんな四日めの八つの数より1だけ大きいわよ。

ⓑ　完璧にぴったりだ。これで、あとしないといけないのは、0と1の間にある数xについてこのパターンを証明することだけなんだけど……でも、$x+x$を見れば必ずできるよ。これは2より小さくなるわけだから。

ⓐ　そうね。これで正しいパターンが得られたのが確かになったわ。

ⓑ　ああすっきりした。もう証明を式にする必要も感じないよ。正しいってわかってるからね。

ⓐ　$1+x$のための規則は、もっと一般的な規則の特殊な場合じゃないかしら。

$$y+x=(y+X_L, y+X_R)$$

とか。そうだったら、コンウェイの複雑な規則よりもずっと簡単になるわ。

❺ 論理的な感じがするぞ。yを足せば、y単位分「ずらす」ことになるはずだ。おっと違う。$x=1$を考えると、$y+1$は$(\{y\},\emptyset)$で、これはyが$\frac{1}{2}$のときには成り立たない。

ⓐ 残念。確かにあなたの$1+x$についての規則も、$x=0$のときは使えないわ。

❺ そうだね。僕が証明したのは、xが正のときだけだ。

ⓐ 足し算規則の規則3をもっと細かく調べるべきだと思う。そうすれば、そこから一般的に何が証明できるかがわかるわ。私たちが手にしているのは数を表す名前だけよ。コンウェイの数が実際の数のようにふるまうなら、この名前は正しくなくちゃいけないんだけど、コンウェイの規則が本当に同じかどうかがわからない。それはそれとして、わずかな基本規則だけから、まるごといろんなことが導けるのは面白いと思うわ。

❺ どれどれ。まず、足し算は明らかに交換可能と呼んでいいよね。つまり

定理9

$$\boldsymbol{x+y=y+x}$$

ⓐ　確かにそうね。今度はコンウェイが言ったことを証明しましょう。

定理 10

$$\boldsymbol{x+0=x}$$

❺　この規則が言っているのは

$$x+0=(X_L+0, X_R+0)$$

ってことだから、することは、また「創造の日」の帰納論法だね。X_L+0 は X_L と同じで、X_R+0 は X_R と同じだと言っていいよ。この数はみんな x よりも前に創造されたわけだから。証明終わり*。

ⓐ　$x+0\equiv x$ を証明したんじゃないの？　$=x$ じゃなくて。

❺　重箱の隅をつつくやつだなあ。変えてほしいんなら定理 10 を変えるよ。実際それで全然違いはないもんね。でも本当は、この証明は実際に $x+0$ が x と恒等的に同じ集合の対であることを示していない？

ⓐ　ごめんなさい。あなたの言うとおりよ。

❺　これで定理が 10 個。のっているうちに、もうちょっとやってみようか。

*xができる前に x_L+0 が x_L に等しくない x_L があるとすると、x_L ができる前に $x_{LL}+0$ が x_{LL} に等しくない x_{LL} がある。同様にして必ずそれより前に創られた数があるはずだが、最初に創られた数以前の数はないので、これはありえない。したがって、x_L+0 が x_L と等しくならない x_L は存在しない。

第十章 ―――― 定理、定理、定理

「足し算の結合法則」、「同様の数に同じ数を足しても同様であること」、「二つの数に同じ数を足しても大小関係は変わらないこと」など、ふたりはいくつもの定理を証明していく。その作業の合間には、相互に依存する二つの定理を証明する必要も出てくるのだが。

そしていよいよ引き算を定める規則も、式として表されることとなる。



ⓐ　結合法則はどうなるかなぁ。

定理 11

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$$

ってやつ。

ⓑ　それって必要なのかなぁ。計算してるときは出てこなかったけど。でもやってみるのは構わないよ。数学の先生はいつもこれは大事なことだと思っていたよね。結合法則はすぐ出てくるんだけど、定義してくれる？*

ⓐ
$$\begin{aligned}(x+y)+z=(((X_L+y)+z)&\cup((Y_L+x)+z)\\ &\cup(Z_L+(x+y)),\ ((X_R+y)+z)\\ &\cup((Y_R+x)+z)\cup(Z_R+(x+y)))\\ x+(y+z)=((X_L+(y+z))&\cup((Y_L+z)+x)\\ &\cup((Z_L+y)+x),\ (X_R+(y+z))\\ &\cup((Y_R+z)+x)\cup((Z_R+y)+x))\end{aligned}$$

ⓑ　こんなもじゃもじゃとした式を書くのがほんとにうまいね。でもこんな変なものが等しいなんて、どうやって証明するの。

ⓐ　そんなにたいしたことじゃないわ。(x,y,z)に、前に

*いったん$x+y=u$などとおき、$u+z$の形を定義に従って明らかにしておいてから、さらに展開する。以下、和を比べるときには同様のことを考える。

やったみたいな日数和論法を使うだけよ。ええっと、$(X_L+y)+z=X_L+(y+z)$ね。(x_L, y, z)は(x, y, z)よりも日数和が少ないもの。それに基づいて帰納できるわ*。他の五つの集合についても同じことが言えるわよ。交換法則が使えることもあるし。

ⓑ　おめでとう。また証明終わりだ。それに≡じゃなくて＝の証明でもある。

ⓐ　その≡が少し気がかりなの。同様の要素は同様の要素の代わりに代入できることを示したけど、＜と≦だけで、足し算についても確かめなきゃなんなくない？

定理 12

$$x \equiv y \text{なら、} x+z \equiv y+z$$

ってこと。

ⓑ　そうだね。じゃないと、数を表す名前に単純化してきたけど、それが厳密にはできなくなるものね。証明する限りはきちんとやるのが当然だろうし。

ⓐ　実際には、もっと狭い命題を証明すればいいんじゃないかな。

*そうならない三つの「悪い」数の組があるとすると、たとえば$(x_L+y)+z$が$x_L+(y+z)$に等しくないという、同種の悪い数の組(x_L, y, z)ができる。それぞれの三つ組が創られた日の和は、xの前に創られた数、x_Lの前に創られた数、その前に創られた数……が次々とできて、どんどん小さくなっていくはず。しかし、第１日より前はないのだから、和は３を下回ることはありえないので、与えられた式が成り立たないような数の組合せは考えられない――四章を参照のこと

定理 13

$$x \leq y \text{なら、} x+z \leq y+z$$

これがあれば、すぐに定理 12 が証明できるから。

ⓑ　そうだね。$x \equiv y$になるのは、$x \leq y$かつ$y \leq x$のときだけだからね。定理 13 も使えそうだ。もっと先も証明した方がいいんじゃない？

$$x \leq y \text{ かつ } w \leq z \text{ なら、} x+w \leq y+z$$

ってこと。

ⓐ　あら、それは定理 13 から出てくるわよ。$x+w \leq y+w = w+y \leq z+y = y+z$

ⓑ　なるほど、それでいいんだ。定理 13 の方が簡単だしな。いやあ、アリスは式のプロだ。定理 13 は何と同等なの？

ⓐ　$X_L < y$ かつ $x < Y_R$ として、$X_L+z < y+z$、$Z_L+x < y+z$、$x+z < Y_R+z$、$x+z < Z_R+y$を証明しなきゃ。

ⓑ　また日数和帰納じゃない？　ほんとに、何か簡単すぎるね。

ⓐ　今度はそれほど簡単じゃないわよ。帰納では$X_L+z \leq y+z$なんかしかでてこないんじゃないかなあ。$x_L < y$で

も$x_L+z\equiv y+z$ってことは考えられるもん。

Ⓑ　ああそうだ。それは面白いな。必要なのは逆で、

定理 14

$$\boldsymbol{x+z\leq y+z} \text{ なら、} \boldsymbol{x\leq y}$$

だね。

ⓐ　うまい！　その逆にした方はこういうことよ。$X_L+z<y+z$、$Z_L+x<y+z$、$x+z<Y_R+z$、$x+z<Z_R+y$として、$X_L<y$かつ$x<Y_R$を証明せよってことね。

Ⓑ　ふむ。逆なら帰納でいけそうだ――たとえば$x_L+z<y+z$なのに$x_L\equiv y$なんてことにならないかぎりはね。これは定理 13 があるから、それはないけど……

ⓐ　でも、定理 14 を証明しようと思ったら定理 13 が必要で、定理 13 を証明したければ定理 14 が必要だわ。それに定理 12 を証明するのにも定理 13 はいるし。

Ⓑ　また堂々巡りになりそうだ。

ⓐ　ああ、でも抜け道はあるわ。両方とも一緒に証明するのよ。(x,y,z)の日数和に基づいて帰納して、「定理 13 かつ定理 14」の組合せ命題を証明できるわ*。

Ⓑ　（顔を輝かせて）アリス！　天才だね。文句なくすご

*求める関係が成り立たない三つの「悪い数」(x,y,z)があるとすると、たとえば、$x_L<y$でも$x_L+z<y+z$という求める関係がやはり成り立たない(x_L,y,z)の組など、x,y,zより前に創られた数が含まれる、何らかの悪い数の三つ組ができてしまう。したがって四章で見た日数和論法が使える。

い。じれったい天才だけど。

ⓐ　あわてないのよ。まだしなきゃなんないことはあるんだから。これを証明しなきゃ。

定理 15

$$\boldsymbol{x-x\equiv 0}$$

ⓑ　そのマイナスの符号は何？　コンウェイの引き算の規則はまだ書いてないよ。

ⓐ　要するに

規則 5

$$\boldsymbol{x-y=x+(-y)}$$

ってこと。

ⓑ　定理 15 では≡と書いてるね。なるほど。$x+(-x)$は 0 と同値的に等しいことにはならないのは明らかだ。つまり、xが、左集合も右集合も空の 0 でなきゃ、無理ってことだ。

ⓐ　規則 3 、規則 4 、規則 5 からすると、定理 15 はこれと同じことだってことになるわ。

$$((X_L+(-x))\cup((-X_R)+x),$$
$$(X_R+(-x))\cup((-X_L)+x))\equiv 0$$

❺ ええ？　これは難しそうだ。だいたい、何かが$\equiv 0$なんてことをどうやって示すんだろう……定理8から、$y \equiv 0$なのは、$Y_L<0$かつ$0<Y_R$のときだけだ。0はすべての数の中で最初に創られたんだから。

ⓐ　同じ命題は、規則2からもすぐに出てくるわ。$y \leq 0$なのは、$Y_L<0$のときだけで、$0 \leq y$なのは、$0<Y_R$のときだけだってこと。だから、証明しなきゃなんないのは、

$$x_L+(-x)<0 \text{ と、} (-x_R)+x<0 \text{ と、}$$

$$x_R+(-x)>0 \text{ と、} (-x_L)+x>0$$

が、X_Lにあるすべてのx_Lと、X_Rにあるすべてのx_Rについて言えることね。

❺ ふむ。$x_L+(-x_L)\equiv 0$と$x_R+(-x_R)\equiv 0$は前提しちゃいけないのかなあ。

ⓐ　いいのよ。帰納で定理15が証明できるんだから。

❺ じゃあわかった。$x_L+(-x)$が≥ 0なら、$(-X)_R+x_L$は、定義からして>0になる。でも$(-X)_R$は$-(X_L)$で、そこには$-x_L$が含まれていて、$(-x_L)+x_L$は>0ではない。したがって、$x_L+(-x)$は<0でないといけない。同じやり方が他の場合にも使える。

ⓐ　やったあ。これで定理 15 の片がついた。

❶　次は何？

ⓐ　これはどう？

定理 16

$$-(-x)=x$$

❶　それは自明だ。次は？

ⓐ　考えられるのは、コンウェイの定理

定理 17

$$(x+y)-y\equiv x$$

くらいね。

❶　それは何と同等だろう。

ⓐ　これはほんとにややこしいわね……いちいち定義に戻らないと証明できないのかなあ。

❶　わかった。うん。これはすいすい解けちゃう。

$$\begin{aligned}(x+y)-y&=(x+y)+(-y) && [\text{規則 5 による}]\\ &=x+(y+(-y)) && [\text{定理 11 による}]\\ &=x+(y-y) && [\text{規則 5 による}]\\ &\equiv x+0 && [\text{定理 12 と 15 による}]\\ &=x && [\text{定理 10 による}]\end{aligned}$$

使える結果をだいぶ積み上げてきたよね——結合法則まで使えるようになっちゃった。僕がうまく判断できるようにそのことを言ってくれてありがとう。

ⓐ　いいわね。足し算と符号の逆転と引き算については、可能性はおそらくすべてでてきたわ。たぶんこの先、こういうことも証明できるわ。

定理 18

$$-(x+y)=(-x)+(-y),$$

定理 19

$$x\leq y\text{なら、}-y\leq -x$$

でも、そこに新しい考え方が入っているとは思えないわね。だから必要もないのにこれを証明しても、あまり意味はないわ。

ⓑ　定理が 19 本か。初めは原始的な規則がいくつかあるだけなのに。

ⓐ　じゃあ約束を思い出してもらわなきゃ。今日の午後は数学はお休み。石のこの先は見ない。掛け算で大騒ぎして、眠れなくなってほしくないもの。

ⓑ　いい仕事をしたよ——問題をぜんぶ解いたんだから。

定理7

$Y_L < x < Y_R$ なら、$x \equiv (Y_L \cup X_L, X_R \cup Y_R)$

規則3

$x + y = ((X_L + y) \cup (Y_L + x), (Y_R + x) \cup (X_R + y))$

規則4

$-x = (-X_R, -X_L)$

定理8

任意の数yが与えられていて、
xが、$Y_L < x$かつ$x < Y_R$という特性をもった
最初に作られた数だとすると、$x \equiv y$である。

定理9

$x + y = y + x$

定理10

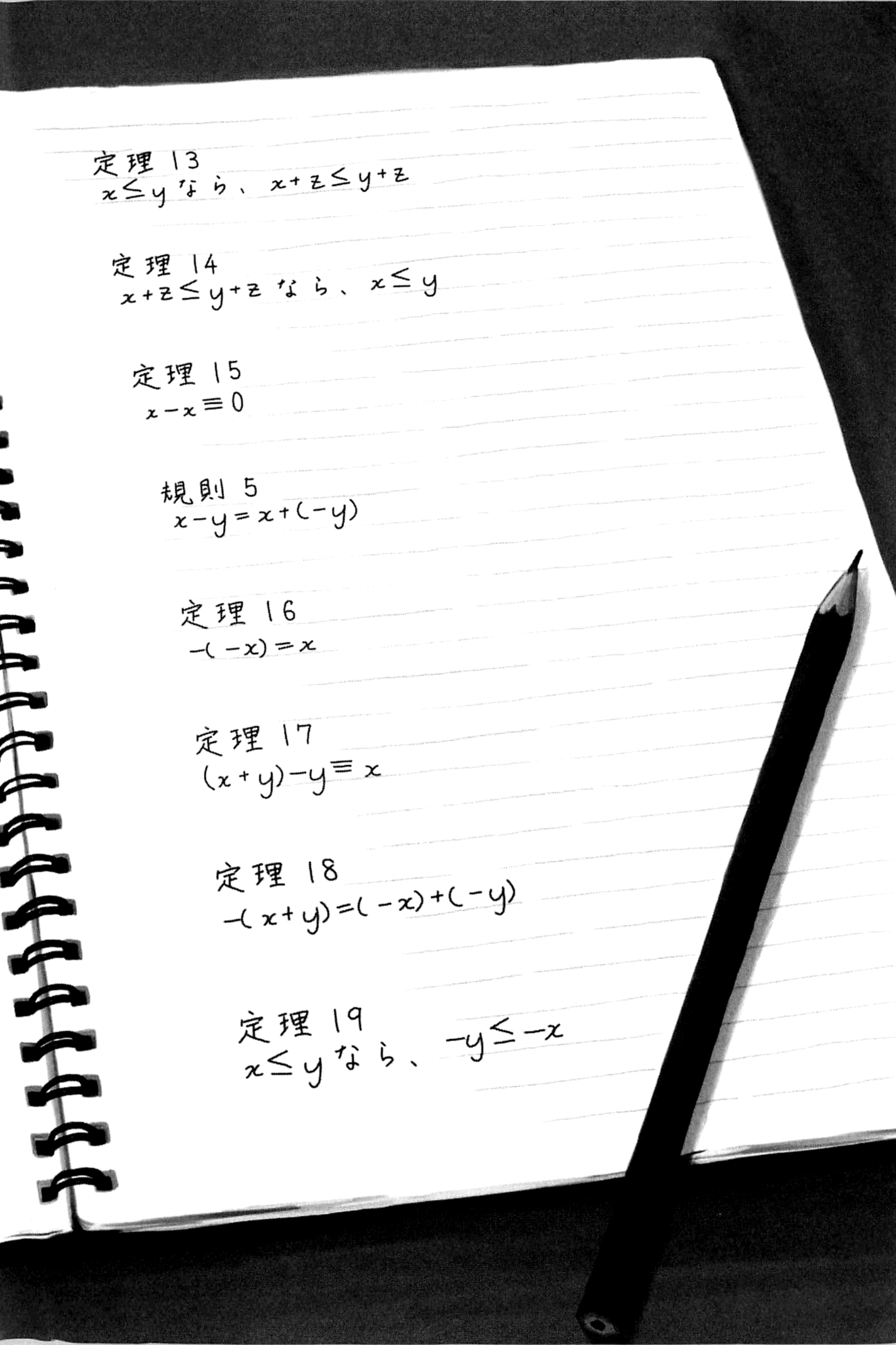
$x + 0 = x$

定理11

$(x + y) + z = x + (y + z)$

定理12

$x \equiv y$ なら、$x + z \equiv y + z$


定理 13
x≦y なら、x+z≦y+z
定理 14
x+z≦y+z なら、x≦y
定理 15
x−x≡0
規則 5
x−y=x+(−y)
定理 16
−(−x)=x
定理 17
(x+y)−y≡x
定理 18
−(x+y)=(−x)+(−y)
定理 19
x≦y なら、−y≦−x

ほら、潮がまた満ちてきた。行くよ、海に入るのが遅かった方が夕食当番！

第十一章——プロポーズ

証明はひとやすみ……。

「コンウェイの数の規則はセックスみたいなもんだね。左集合と右集合が交わって……」



ⓐ　あなたが作った夕御飯はほんとにおいしかったわ。

ⓑ　（その横に寝転がって）だいたいは君が捕った魚のおかげだけどね。

今、何考えてる？

ⓐ　（顔を赤らめて）うん。実は妊娠したんじゃないかと思うの。

ⓑ　どういうこと？　こんな肥沃な三日月地帯の近くだからって……*

ⓐ　面白い面白い。１＋１＝２を証明したと思ったら、１＋１＝３だってことがわかるわけね。

ⓑ　わかった、負けたよ。冗談はやめよう。でもそれは考えなきゃ。コンウェイの数の規則はセックスみたいなもんだね。左集合と右集合が交わって……

ⓐ　あなたってそれしか考えてないのね——違う、二つだけね。でも真面目な話、ほんとに妊娠してたらどうしよう。

ⓑ　いずれにしても、そろそろ帰った方がいいかなって思ってた。お金もなくなりそうだし、気候もこれから悪くなるからね。

*肥沃な三日月地帯は、古代の中近東の農業地帯。「肥沃な」を意味する fertile には、「子どもがたくさんできる」という意味もある。



実を言うと、ともかくほんとに君と結婚したいんだ。妊娠してるかどうかは関係なしに。もちろん、君がよければだけど。

ⓐ　私もそう思ってる。今度の旅でずっとやってけるということがわかったわ。

気になってるんだけど……子どもが大きくなったら、私たちの数の理論は教えるの？

ⓑ　いや。自分で見つけた方が面白いだろう。

ⓐ　でも何もかも自分で見つけることはできないのよ。何かの補いは必要よ。

ⓑ　でも、ものをおぼえるというのは、本当は自分で発見する過程じゃないのかなあ。いい先生って、学生に自分で考えることを助けるんじゃない？

ⓐ　ある意味ではそうね。ふう。何か哲学的になっちゃった。

ⓑ　このおかしな数学をしてるときに感じるすごさは言葉にならないよ。今は夢中になっちゃってるけど、前は大嫌いだったんだよ。

ⓐ　そうね。私もわくわくしてるわ。麻薬よりもいいんじ

ゃない？　脳は薬なんか使わなくても、自分で自然に刺激できるのよ。

ⓑ　おまけに媚薬効果もあるしね。

ⓐ　（星空を眺めて）純粋数学で素敵なことって——今日証明したことは、何の役にも立たないわよね。だからこれを使って爆弾とかそういうものを作ったりはできないのよ。

ⓑ　確かに。でもずっと象牙の塔にいられるわけでもないからね。この世にはいろいろな問題があって、数学にもそれを解決するために使えるようなちゃんとした数学もあるよ。新聞もずいぶん読んでないから、そういう問題もぜんぶ忘れちゃったけどね。

ⓐ　そうね。ときどきそれが後ろめたくなることもあるわ……

もしかして、ちゃんとした数学がそういう問題を解決するのかもしれないけど、濫用もされるんじゃないかって心配だわ。

ⓑ　そこが矛盾でジレンマだね。道具がなければ何にもできないけど、道具はいいことだけじゃなくて悪いことに

も使えるからね。手にするとろくなことがないからって、人間が物を創らなければ、役に立つこともしなくなっちゃう。

ⓐ　わかった。純粋数学ならいいってわけじゃないってことは認めるわ。でも、それがこの世の問題を解決しないってだけで、それをやめちゃうの？

ⓑ　そんなことはないよ。誤解しないでね。この何日かで、純粋数学が美しいってことはわかった——詩や絵や音楽みたいな芸術で、それで夢中になるんだ。人間の自然な好奇心は満たさなくちゃ。ひどい状況の中でも、何も楽しいことがなければ、人間、だめになっちゃうよ。

ⓐ　こういうことを話すのもいいわね。

ⓑ　ぼくも楽しいよ。君にまた近づけたような気がするし、気持ちが安らぐし。

第十二章——災難

$x+y$が、確かにコンウェイの規則1を満たす、ちゃんとした「数」であること、それが確認されていなかったことにふたりは気がつく。足し算の、別の定義への置き換えを含めた再検討を迫られることとなった。

それから、規則1を満たさない左集合と右集合から定義される「数もどき」についても、数と同じ性質があるかどうかふたりは調べはじめる。



ⓑ もう起きてる？

ⓐ １時間くらい前に起きて、昨日、証明したと思ったことに大きな穴が開いていることに気づいたのよ。

ⓑ そんな！

ⓐ でも、そうらしいわ。$x+y$が数だってことを証明するのを忘れてるの。

ⓑ 何ばかなことを。数に決まってるよ。二つの数の和なんだから。あ、ちょっと待て……規則１が満たされていることを調べなきゃ。

ⓐ そうなの。足し算の定義は、$X_L+y<X_R+y$と、$X_L+y<Y_R+x$と、$Y_L+x<X_R+y$と、$Y_L+x<Y_R+x$が証明できるまでは、正式じゃないのよ*。

ⓑ これは定理 13 と 14 から出てきそうだけど……言いたいことはわかった。定理 13 と 14 は、二つの数の和が数だという前提で証明したってことだね。こんな問題、いったいどうして思いついたんだ？

ⓐ うん、それがちょっと面白いのよ。足し算をこんなふうに定義したらどうなるかって考えてたの。

$$x\oplus y=(X_L\oplus Y_L, X_R\oplus Y_R)$$

*$x+y=((X_L+y)\cup(Y_L+x),(Y_R+x)\cup(X_R+y))$なのでこれが数であるためには、$(X_L+y)\cup(Y_L+x)<(Y_R+x)\cup(X_R+y)$でなければならない。左集合全体が右集合全体より「左」になければならないので、集合の和のそれぞれの部分について、左<右が成り立たなければならない。

これを⊕と呼んだのは、これが＋と同じことだってのは明らかじゃないからよ。でも⊕が交換則も結合則も成り立つ演算だってことはすぐにわかった。だから、これでどうなるか、見てみたいと思ったの*。

ⓑ なるほど。xとyの和は、X_L+Y_LとX_R+Y_Rの間にあって、だからこの定義の方が、コンウェイの定義よりも簡単になるかもしれないね。

ⓐ でも私の希望はすぐに消えちゃったわ。すべてのxについて、

$$0\oplus x=0$$

だってことがわかっちゃった。

ⓑ あたた。もしかして⊕は掛け算のことなんじゃないの？

ⓐ それから先も証明したわよ。>0になるすべてのxについて$1\oplus x=1$とか、>1になるすべてのxについて$2\oplus x=2$とか、>2になるすべてのxについて$3\oplus x=3$とか……

ⓑ なるほど。すべての正の整数mとnについて、$m\oplus n$はmとnの小さい方ってわけか。交換法則と結合法則

*足し算を前提にしているのではないことに留意。この定義に沿って演算したら、われわれが知っている足し算と同様の結果が得られるかどうかを調べようとしている。

は、確かに成り立つ。⊕演算は面白いことになったんだ。

ⓐ　そうだし、$\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$なの。でも、$(-\frac{1}{2})\oplus\frac{1}{2}$を試してみて、そこで止まっちゃったのよ。

ⓑ　どういうこと……？　なるほどね。$(-\frac{1}{2})\oplus\frac{1}{2}=(\{(-1)\oplus 0\},\{0\oplus 1\})$で、これは$(\{0\},\{0\})$のことだね。

ⓐ　だからこれは数じゃないのよ。規則1が成り立たないから。

ⓑ　じゃあ、アリスの定義がちゃんとしてなかったんだ。

ⓐ　勝手に定義を立てることはできないなあって思ったわよ。他の規則とも整合することを証明しなきゃね。⊕には、たとえば、$(\{-1\},\emptyset)\equiv 0$だけど、$(\{-1\},\emptyset)\oplus 1\equiv 0\oplus 1$じゃないって問題点もあるし[*]。

ⓑ　わかった。⊕はだめだ。でも＋の本当の定義を立てられるんじゃないのかなあ。

ⓐ　わかんない。今言ったのは、私がやってみた範囲よ。数もどきについて考えたにしてもね。

ⓑ　数もどき[**]？

ⓐ　X_Lが必ずしも$<X_R$じゃないときに(X_L,X_R)を作ると

*$(\{-1\},\emptyset)\equiv 0$は、六章で見た。$(\{-1\},\emptyset)\oplus 1$は$(\{-1\},\emptyset)\oplus(\{0\},\emptyset)=(\{-1,0\},\emptyset)$で、これはやはり六章で見たように、1であり、$0\oplus 1\equiv 0$は先ほど見た。

**pseudo-number。pと略される。

してみましょう。すると、やっぱり規則2を使って、こういう数もどきの間にも$\leq$の関係を定義できるの。

ⓑ　そうだねえ……$(\{1\}, \{0\})$が2より小さいことがわかるようなものか。

ⓐ　そのとおりよ。それに気がついたんだけど、定理1の推移律は、規則1の$\not\geq$の部分は使わなかったから、この法則は、数もどきに成り立つわよ。

ⓑ　そうだね。定理2になるまで、規則1はぜんぶ使い切らないって言ったのを思い出したよ。もうずいぶん前みたいな気がするけど。

ⓐ　ここできっとびっくりするわよ。数もどき$(\{1\}, \{0\})$は≤ 0でも≥ 0でもないの*。

ⓑ　すごい！

ⓐ　でしょ。$(\{1\},\{0\})$がある数yより$\leq$なのは、$y>1$のときだけで、それがある数xより$\geq$なのは、$x<0$のときだけなの。これは0と1との間にあるどんな数とも関係が全然とれないの。

ⓑ　鉛筆はどこ？　検算してみたくなった……アリスの言うとおりだと思うよ。面白いね。僕たちは今、存在さえ

*$(\{1\},\{0\})$をpとすると、$p\leq 0$とは、規則2より$1\not\geq 0$かつ$p\not\geq \emptyset$のことで、$1\not\geq 0$は成り立たない。$0\leq p$とは、$\emptyset\not\geq p$かつ$0\not\geq 0$のことで、$0\not\geq 0$は成り立たない。

しない量について何かを証明しようっていうんだから。

ⓐ　でも、数もどきが存在しないんだったら、コンウェイの数だって存在するのかしら。言いたいことは、どこまでも頭の中だけにあって、現実世界に理解の助けになるような対応するものがない量について何かを証明しようとしてるってことね……ほら、$\sqrt{-1}$は想像上の数と考えられてたし、$\sqrt{2}$は「合理的」じゃないとまで思われてたのよ*。

ⓑ　通常の数の足し算のためのコンウェイの規則は、数もどきの足し方も与えてくれるよ。こんなのはどうなるかなあ。$x=(\{1\},\{0\})$ならば、$1+x$は……$(\{2\},\{1\})$だ。

ⓐ　それから$x+x$は、$(\{1+x\},\{x\})$で、二次的な数もどきだわ。

ⓑ　純粋数学ってのは、ほんとに頭を広げてくれるね。

　でも、$(\{1\},\{0\})$は、≤「それ自身」でさえないのは知ってた？

ⓐ　ええっと、$x \leq x$は$X_L < x < X_R$ってことだから、これは$X_L < X_R$のときにだけ成り立つのね。

　違うわ、待って。数もどきについて、“$\not\geq$”の代わり

*虚数＝imaginary　number は、「想像上の数」という意味であり、無理数＝irrational number は、本来は整数比が取れないという意味だが、「rational＝合理的」ではないという意味にもなることを言っている。

にくを使うのは、まだ認められてないわ。だって、定理4は一般に成り立つわけじゃないもの。$x \leq x$なのは、$X_L \ngeq x$かつ$x \ngeq X_R$のときだけだってことを言う、元の規則2に戻らなきゃ。そうすると、$(\{1\},\{0\})$は、やっぱり≤「それ自身」になるわ。

Ⓑ　一本、それまでだね。間違っててよかったよ。xが、数もどきのときでも、すべて「それ自身」と同様のはずだもんね。

ⓐ　もしかしたら、≤「それ自身」ではない、もっと複雑な数もどきがあるかもよ。思い浮かべにくいけど。だってX_LとX_Rという集合が数もどきも含んでいるかもしれないじゃない。

Ⓑ　定理3の証明に戻って、それが成り立たなくなるかどうか見てみよう。

ⓐ　そうね……ほら、同じ証明がすべての数もどきにも通用するわ。xは必ずxと同様なのよ。

Ⓑ　それはすごいけど、本題からは遠くなるんじゃないか。＋がちゃんと定義されるかどうかだろ？

ⓐ　ええっと、$x+y=y+x$, $x+0=x$の証明と、それから

結合法則も、数だけじゃなく数もどきに使えるわ。不等式の定理 13 と 14 も数もどきに通用するなら、＋はきちんと定義できるわよ。

ⓑ　なるほど。美しい。ここまでで、定理 1 、3 、5 、6 、9 、10、11 を、すべての数もどきについて確かめたわけだ。定理 13 をもう一度見てみよう。

ⓐ　でも、いいのかなあ。そうだ、ビル。昨日、定理 13 と 14 の日数和証明を認めたところが間違いだったのよ。話がうますぎるわ。

ⓑ　どういうこと？

ⓐ　私たちは、$Z_L+x<y+z$を帰納法で証明しようとしてたわけでしょ？　で、そうなるためには、2 段階必要なのよ。まず$Z_L+x\leq Z_L+y$と、それから、$Z_L+y<z+y$よ。帰納法からは前半は言えるけど、後半には(z_L,z,y)が入っているわ。これは(x,y,z)の日数和より大きいかもしれないわよ。

ⓑ　それを忘れてたね。コンウェイがいたら恥ずかしいだろうね。

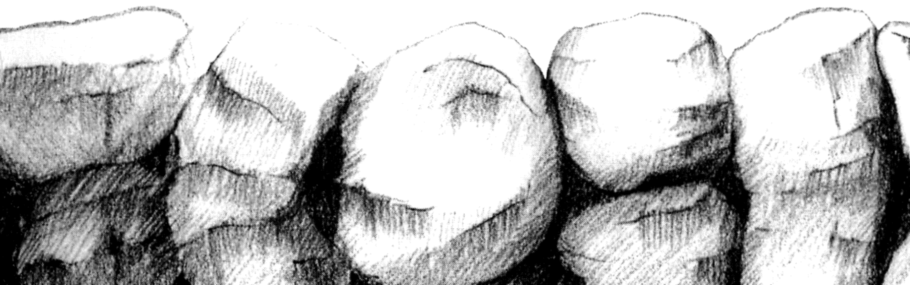
ⓐ　昨日このことに気づかなかったのは良かったわよ。で

なきゃ、せっかくの昨日が台無しになってたわよ。

❺ 作業に戻ろうか……でも、何か朝ごはんを食べなきゃ。

第十三章————復活

前章に続いて、$x+y$が確かにコンウェイの規則1を満たす、ちゃんとした「数」であるかどうか、その検討が行われる。そのために満たしておかねばならない前提を挙げていく。そしてその前提を整理する作業が活躍する。もちろん最後には……



ⓐ　お昼、食べそこねちゃったね。

❶　(うろうろ歩きながら) そうだっけか。こんなつまらない問題でかっかしてるんだ。

ⓐ　紙をにらんでいるだけっていうのも、何の役にも立たないわ。ひと休みしましょう。もしかして、何か食べたら……

❶　必要なのは新しいアイデアだ。何かアイデアない？

ⓐ　(食べはじめて) そうねえ、前にこんなふうに堂々巡りになったときには、どうやって抜け出したっけ。いちばんは帰納を使ったわよね。要するに、あることが成り立つかどうかが一つ前の場合が成り立つかどうかで決まるのよ。その前の場合がさらにその前の場合にかかっていて、それがどこか終わりになるところまで続くってこと。

❶　あの日数和論法みたいにね。

ⓐ　そうよ。もうひとつ、堂々巡りから抜ける方法は、必要だと思ってたこと以上のことを証明することだったわ。つまり、帰納が続くようにするために、いくつかのことを同時に証明しなければならなかったわよね。

ⓑ　アリスが定理13と定理14を組み合わせたときみたいにね。わかった。昼が終わったら、全体像を書き出してみるよ。証明しなければならないことぜんぶ。たぶん余分もあるだろうね。それからぜんぶ同時に帰納で証明することを考えてみよう。昔からある当たって砕けろ方式だけど、それでだめならやれることはないよ。

ⓐ　きつそうだけど、それがいちばんいい方法だよね。さあ、ビスケット食べて。

***

ⓑ　じゃあ始めようか。数について証明したいことは三つだね。ぜんぶ互いに依存してるらしい。

Ⅰ. $x+y$は数であること。

Ⅱ. $x \leq y$なら、$x+z \leq y+z$であること。

Ⅲ. $x+z \leq y+z$なら、$x \leq y$であること。

間違ってなければ、Ⅰ(x,y)*の証明は、その前に、次のことを証明してあれば、導ける。

Ⅰ(X_L, y), Ⅰ(x, Y_L), Ⅰ(X_R, y), Ⅰ(x, Y_R),

Ⅲ(X_R, X_L, y),

*上のⅠを用いて、二つの数の和が数であることをこう表現する。以下、Ⅱ、Ⅲについても関係する成分を用いて同様の表現をする。たとえば、Ⅲ(X_R, Y_L, y)とは「$X_R+y \leq X_L+y$なら、$X_R \leq X_L$である」を意味する。

$\mathrm{III}(x, X_L, y)$, $\mathrm{II}(y, Y_R, x)$,

$\mathrm{III}(y, Y_L, x)$, $\mathrm{II}(x, X_R, y)$,

$\mathrm{III}(Y_R, Y_L, x)$

だ。たとえば、いろいろあるけど、$X_L+y<Y_R+x$を証明しなければならない*。つまり、X_Lにあるすべてのx_Lと、Y_Rにあるすべてのy_Rについて、あらかじめ、$x_L+y<y_R+x$であることを確かめておくべきだった。さて、$\mathrm{III}(x, x_L, y)$と定理4は、$x_L+y<x+y$を示す**し、$\mathrm{II}(y, y_R, x)$は、$y+x\leq y_R+x$を示す***。いい？

ⓐ　いいみたいよ。ただ、最初の$\mathrm{I}(X_L, y)$から$\mathrm{I}(x, Y_R)$までが入っているのがなぜだかわからない。つまり、x_L+yが数じゃなくても構わないんじゃないのってこと。知る必要があるのは、x_Lとyそれぞれが数だってことでしょ。要するに、$<$と$\leq$が数もどきについて定義されて、推移律もうまくいくわよ。

ⓑ　そうじゃない。規則1が言っているのは、x_L+yのような左の部分の要素は数でなければならないってことだよ。ともかくそれはどうでもいい。証明しようとしているのが$\mathrm{I}(x, y)$なら、$\mathrm{I}(x_L, y)$などはそのまま仮定して

*十二章の冒頭を受けてのこと。

**$\mathrm{III}(x, x_L, y)$は$x+y\leq x_L+y\rightarrow x\leq x_L$を表す。ところが$x_L<x$ ($x\not\leq x_L$)なので、$x+y\not\leq x_L+y$(上記の対偶で、元の命題が成り立つなら、必ず成り立つ)。つまり$x_L+y<x+y$となる。

***$\mathrm{II}(x, y, z)$とは「$x\leq y$なら$x+z\leq y+z$」のこと。

いい。帰納が面倒を見てくれるよ。

ⓐ　複雑ね。でもやってみましょう。望みはありそうだわ。

❺　この行き方でうまくいくしかないんだ。でなきゃ沈没だよ。いいぞ。II(x,y,z)、つまり定理13の証明は、あらかじめ

III(y,X_L,z),

II(x,y,Z_L), III(z,Z_L,y),

III(Y_R,x,z),

II(x,y,Z_R), III(Z_R,z,x)

が証明されていれば出てくる。

変だな——これには実は、I(x,y)は要らないぞ。どうして定理13を証明する前に、二つの数の和が数だってことを証明しなくちゃと思ったんだっけ。

ⓐ　数もどきについていろいろ知る前のことよ。固定観念が頭の働きの障害になるのはほんと、おかしなことね。おぼえてる？　それが$x+y$が数だってことを証明するのは厳しいぞって言ってた第一の理由なのよ。定理13はこれにかかっていると思ったからよ。数もどきが推移

律を満たすことがわかってからは、そもそもの混乱の元をあらためて考えるのを忘れてる。

ⓑ　すると、少なくともこの「大きな構図」方式は、どこかへはつながっているわけか。自分の考えをまとめる手助けをしているからだけのことでもね。

さて、二つが片づいて、あとひとつだ。III (x, y, z) の証明は、

II (y, X_L, z),

II (Y_R, x, z)

がわかることにかかってる。

ⓐ　やっぱり I (x, y) は必要なかったわ。ってことで、定理 13 と 14 は、$x+y$ が数かどうか気にしなくても、単純に証明できるのよ。

ⓑ　なるほど——すると、$x+y$ は定理 13 と 14 があるから、後で数だってことがわかるんだ。すごい。

ⓐ　II とIII は互いに依存しているから、前にやったみたいに一つの命題に組み合わせられるわ。

ⓑ　いいぞ。ええっと、II とIII を組み合わせたものをIV とすれば、僕が挙げたことから、IV (x, y, z) は

$$\mathrm{IV}(y, X_L, z),\ \mathrm{IV}(x, y, Z_L),\ \mathrm{IV}(z, Z_L, y),$$

$$\mathrm{IV}(Y_R, x, z),\ \mathrm{IV}(x, y, Z_R),\ \mathrm{IV}(Z_R, z, x)$$

にかかっていることがわかる。

このI(x, y)なんかの新しい表記法を導入したのはいいアイデアだったと思うよ。パターンがはっきりするからね。これでやらなきゃなんないのは、六つのことからIV(x, y, z)に進む帰納仮説をこしらえる道をつけることだけだ。

ⓐ でも、ほら、うまく行かないわよ。見て。IV(x, y, z)は、IV(z, z_L, y)に依存して、それはIV(y_R, y, z)に依存して、それはIV(z, z_L, y)に依存してだから、ぐるぐる回っちゃうわよ。前に気がついたのと同じつまらない問題じゃないの。そこが分かれ目だってことはわかってるし。

ⓑ （土をどんどん叩いて）だめだ……ええっと、もう一つあるぞ。あきらめる前にやってみよう。あらためてやり直して、定理13のもっと一般的な形を証明しよう。

V. $x < x'$かつ$y \leq y'$なら、$x + y \leq x' + y'$

これは今度の証明で実際に使っていることだよ。定理

13 で二段階を踏むんじゃなくてね。これは対称的だから、役に立つかも。

ⓐ　逆も必要よ。定理 14 を一般化するの。

❶　必要なのは、

VI. $x+y \geq x'+y'$ かつ $y \leq y'$ なら、$x \geq x'$

ⓐ　その表記、ダッシュも何も、ずいぶんプロ風ね。

❶　(考え込みながら) ありがとう。さて、V(x, x', y, y') の証明は、

VI(X_L, x', y, y'),

VI(Y_L, y', x, x'),

VI(x, X'_R, y, y'),

VI(y, Y'_R, x, x').

にかかってる*。ほら、こっちの方がもう一方よりほんとに簡単だね。対称的なところが役に立つ。

結局、VI(x, x', y, y') を証明するのに必要なのは……サスペンスはたまらないね。考えられないよ……

V(x, X'_L, y, y'), V(X_R, x', y, y')**

ⓐ　(跳び上がって) 見て、日数和論法よ。V と VI にあてはめるの。これで帰納が完成よ。

* VI(X_L, x', y, y') は、$X_L+y \geq x'+y'$ かつ $y \leq y'$ なら $X_L \geq x'$ ということ。ところが、V(x, x', y, y') の定義から $x < x'$ なので、$X_L \ngeq x'$。したがって、対偶 $X_L \ngeq x'$ ならば $X_L+y' < x'+y'$ または $y > y'$ が成り立つが、やはり V の条件から $y \leq y'$ なので、$X_L+y' < x'+y'$ が成り立つしかない。他の三つについても同様にして、$x+y \leq x'+y'$ と言える条件がそろう。

** V(x, X'_L, y, y') は、$x \leq X'_L$, $y \leq y'$ なら、$x+y \leq X'_L+y'$ のことだが、VI(x, x', y, y') の定義から $x+y > X'_L+y'$ となり、対偶「$x+y \nleq X'_L+y'$ なら $x > X'_L$ または $y > y'$」が成り立つ。ところが、$y \leq y'$ なので、$x > X'_L$ が成り立つほかない。V についても、同様にして $x \geq x'$ と言える条件がそろう。



❺　（アリスを抱きしめて）できた。

ⓐ　私、信じられないんだけど、この二つの命題の証明は、すべての数もどきx, x', y, y'に通用するのよ。

❺　ずいぶん調べてきたけど、これがいちばん美しいよ。

ⓐ　うん。昨日はあたりまえだと思ってたことにずいぶんエネルギーを使っちゃったわね。

　コンウェイ本人は、もっと簡単なやり方でこの法則を証明したんじゃないかって思うんだけど。たぶんそうよ。でも、そうだとしても、私は二人でやった方が好きだわ。証明の方法について、いろんなことがわかったもの。

❺　今日は掛け算を調べるはずだったんだけどね。

ⓐ　今から始めない方がいいわよ。また眠れなくなちゃう。午後はもう、xが数なら必ず$-x$は数だってことの証明にかけるだけにしましょ。

❺　そうだね。それならもう簡単なはずだ。それから数もどきにもマイナスがどう作用するかについて、何かを証明できるかどうか、わからないけど。

第十四章――宇宙

　要素を次々と定義していく果てのない集合を用いることによって、数が任意の「有理数」さらに「実数」へと「拡張」されていく。さらには、「無限大」と「無限小」も定義されるのだ。

　数は、左集合と右集合の間にできる最初のものとして創られる、それを思い出すこと。この性質を利用することによって、どんなに細かい数も定義できることになる。



ⓑ （のびをしながら）おはよう。昨夜ひと晩考えて、何か僕たちの数学の間違いは思いついた？

ⓐ なかったわ。あなたはどうなの。

ⓑ 何言ってるの。僕は間違い探しなんかしないよ。でもひとつ思いついたよ。今、すべての数を創るための規則を求めようとしてるわけだけど、実際には $\frac{1}{3}$ なんかは、全然出てこないよね。ほら、四日めにはそれが出てくると予想したけど、出てきたのは $\frac{1}{4}$ だったよね。$\frac{1}{3}$ はなかなか出てこなくても、いずれはたどりつくんじゃないかなと思ってたんだけど。そう言えば、すべての数を分析したけど、$\frac{1}{3}$ はまだ出てきていないよねって思ったんだ。

ⓐ 創られている数はみんな、二進法で考えたら有限の表し方ができるわね。$3\frac{5}{8}=11.101$ とか。逆に、有限の二進表記がある数はみんないずれできるのよ。$3\frac{5}{8}$ は……八日めにできるみたいに。

ⓑ 二進法はコンピュータで使われてるよね。コンウェイはコンピュータ化した世界を作ってたのかもしれないね。

$\frac{1}{3}$を二進法で表すとどうなる？

ⓐ　わからないけど、何かあるはずよ。

ⓑ　そうそう思い出した。割り算をえんえんと続けるんだ。ただ、基にする数が10じゃなく、2だけどね。ええっと……

$$\frac{1}{3} = .0101010101\cdots^{*}$$

と無限に続くよ。終わりがない。だから作られないんだ。

ⓐ　「無限に（アド・インフィニツム）」というのは、石碑の最後の方にあったと思うわ。ℵ日とか何とか、岩は何を言いたいんだと思う？

ⓑ　何かの哲学か宗教の数を称える言葉って感じだね。古い文章にはよくあるよ。

逆に、コンウェイは無限に多くの日が経った後のこともあれこれ言ってるよ。「時間が終わるまで」って言ってて、でも時間はまだ終わってなかったってわけか。

ⓐ　今日は立派な声ね。[**]

ⓑ　無限大の日数が経った後、コンウェイは自分が作った二進数をすべて見渡して、……そうだ！　コンウェイは

*二進法での小数は、小数点から右に $\frac{1}{2}$ の桁、$\frac{1}{4}$ の桁、$\frac{1}{8}$ の桁…というふうに並んでいる。$\frac{1}{3}$ をこれら基になる数の組合せで表す。$\frac{1}{2}$ より小さいので、$\frac{1}{2}$ の桁は0、$\frac{1}{4}$ よりは大きいので $\frac{1}{4}$ の桁は1で残りは $\frac{1}{12}$。これは $\frac{1}{8}$ よりは小さいので $\frac{1}{8}$ の桁は0…というふうに考えていく。

**六章の最後を思い出すこと

きっと止めなかったんだよ。

ⓐ　そのとおりよ。前は考えなかったけど、石はコンウェイがその先も続けたって言ってる感じなのよね。そうして……きっともっとたくさんの数もできたのよ。初めてX_LとX_Rが無限集合になったんだから。

❶　たぶん、時間の流れ方は一定じゃないんだ。つまり、僕たちにとっては、一日一日は同じ長さに見えるけど、コンウェイの視点で僕たちの宇宙を覗き込んだら、一日一日は、この宇宙の外にある絶対の物差からするとどんどん速く進むようになるのかもしれない。地球の一日は天の世界の一日分で、次の地球の一日は天の二分の一日分で、その次は四分の一日分でとか、そういうこと。するとあら不思議、天の世界で二日進むと、地球では無限の日数が過ぎていて、それでもまだ先へ行けるんだ。

ⓐ　そんなこと考えもしなかったけど、筋は通っているわね。ある意味、私たちは、地球で無限の日数が過ぎた後のコンウェイの立場にいるわけか。すべてが出てきたことは本当にわかってるものね。$\aleph$日まで行っちゃうのよ。

❶　（身振りもまじえて）数学にはこんないいところもあ

るんだ。僕たちの有限の頭で、無限が理解できる。

ⓐ　少なくとも数えられる無限はね[*]。

ⓑ　でも実数は数えられない無限で、しかも理解もできるよ。

ⓐ　私もそうじゃないかと思うわ。実数はすべて小数（デシマル）が無限桁続くものだもん[**]。

ⓑ　二進数小数で無限桁だよ。

ⓐ　ねえ、わかったわよ。$\aleph$日にどうなるか——実数がすべて作られるのよ。

ⓑ　（目を丸くして）すごい。きっとそうだよ。

ⓐ　そうね。$\frac{1}{3}$は、X_Lをたとえば

$$\{.01, .0101, .010101, .01010101, \cdots\}$$

と二進表記にして、X_Rは上から$\frac{1}{3}$に近づいていく数にすればできるのよ。こんな感じ[***]。

$$\{.1, .011, .01011, .0101011, .010101011, \cdots\}$$

ⓑ　πみたいな数も、だいたい同じような方法でできるね。πを二進数で表したものなんて知らないけど、たとえば

$$\pi = 11.0010010000111 1\cdots$$

*「可付番無限」とも言われる。

**デシマルには十進数という意味もある。ここでは「十分の一単位の小数」というのが正確な意味。

***X_Lは実際の$\frac{1}{3}$の二進表記で1が出るたびに打ち切るものを順にとっている。X_RはX_Lのそれぞれの要素の最後の桁に1を加える（$1+1=10$なので、次の桁にくりあがる）。この方式で「真の」$\frac{1}{3}$を二進の分数で左右からはさんでいく。後に出てくるπについても、二進小数表記を元に、同様の方式で両側からせばめていっている（求める数は、その両側の集合の「間」にできる最初の数と定義される）。

のようなものだとしたら、“1”になるごとに止めると Π_L^{*} ができる。

$$\Pi_L = \{11.001, 11.001001, 11.00100100001, \cdots\}$$

で、Π_R は、“0”のところで止めて、そこに1を書き加えてできる。

$$\Pi_R = \{11.1, 11.01, 11.0011, 11.00101, \cdots\}$$

ⓐ　Π_L と Π_R として使える集合は他にもたくさんあるわ。無限にたくさんよね。でもそれがぜんぶこれと同等の数を創るの。それが Π_L より大きくて Π_R より小さい最初に創られる数だから。

❺　(アリスを抱きしめて) それこそコンウェイの石が宇宙は $\aleph$ 日に創られたと言っている意味だね。実数が宇宙なんだ。

宇宙論学者が「ビッグバン」って言ってるの聞いたことある？　それだね。$\aleph$ 日に「バン」だ。

ⓐ　(聞いてない) ねえ、$\aleph$ 日に作られる数がまだあるわ。実数の体系にはない数よ。X_R は空として、

$$X_L = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

とすると、この数は他のすべての数よりも大きいわよ。

*Π はギリシア文字 π の大文字。

ⓑ　無限大だ。はるか彼方の。

ⓐ　この数をギリシア文字の ω で表そうと思うの。だって、この字が好きなんだもん。$-\omega$ も創られるわね。つまりマイナス無限大よ。

ⓑ　$\aleph$ 日は忙しい日だね。

ⓐ　そして次の日は——

ⓑ　$\aleph$ は終わりじゃなかったんだ。

ⓐ　終わらないわよ。どうしてここでやめなきゃなんないの。私の勘では、コンウェイは手をつけただけよ。手順は終わらないわ。空の X_R と、それまで創られた数すべての集合 X_L とは必ずできるもの。

ⓑ　でも、$\aleph$ 日の次の日にはもうすることはあまり残ってないよ。実数はもうぎっしり詰まっているじゃない。宇宙の無限大じゃない部分はもうできた。二つの「隣り合う」実数の間には、もう数を入れる余地はないよ。

ⓐ　違うわ。あなたが今それを言うまでは私もそう思ってたけど。要するにあなたと議論したいってことかな。$X_L=\{0\}$ で、$X_R=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\}$ にしたらどう？ これはゼロよりは大きいけど、すべての正の実数よりも

小さい数よ。これは ε と呼ぼうかしら。

ⓑ （気を失いそうになって）ひぇー……大丈夫、大丈夫だよ。でも多すぎるよ。限界がなくちゃ。

いちばんびっくりするのは、アリスが作った ε って数が、実は ℵ 日に創られていて、その翌日じゃないってことなんだ。だって、$X_R=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\}$にしていてもよかったんだし、このおかしな数は他にもいっぱいあるよ。たとえば、

$$(\{1\},\{1\frac{1}{2},1\frac{1}{4},1\frac{1}{8},1\frac{1}{16},\cdots\})$$

これはほんの少しだけ 1 より大きい。

この類の数が、どんな数の隣りにもあるんじゃないか。π でも何でも……いや、それはないか……

ⓐ π よりもちょっと大きい数は、ℵ 日の後になるまでは出てこないわ。ℵ 日には、終わりがある二進数が π に無限に近い隣りまで行けるだけなのよ。

ⓑ ℵ 日の次の日には、0 と ε の間の数ができる。それでアリスはコンウェイがまだ手をつけたばかりだと思ってる。

ⓐ 素敵なのはねえ、実数と無限大とその間の数がぜんぶ

できただけじゃなくて……二つの数のうちどちらが大きいか言える規則ができたってこと。それから足し算と引き算の規則もあるわ。

ⓑ そのとおりだ。この規則をみんな、自分が何を証明しているかを知って証明したんだ——ただのゲームで、コンウェイのわずかな規則から、昔からある算術の標準的な法則を導くんだ。でもこの証明は聞いたこともない集合にも、無限にあてはまることがわかった。数を制約するのは僕たちの想像力だけで、僕たちの意識は広がるし……

ⓐ これは私にとっては宗教的な経験みたい。私はだんだん神がわかるようになってきてる。神はいたるところにいる……

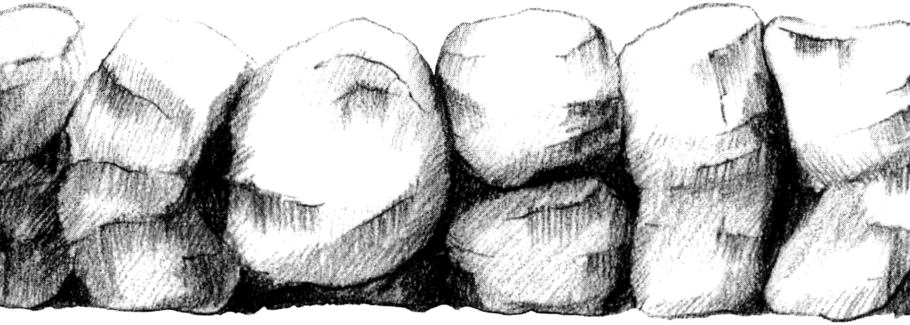
ⓑ 実数の間にもってか。

ⓐ ちょっと、やめてよ。私は真剣なのよ。

第十五章——無限

前章で創られた「無限大」をもとにして、ふたりの手によって次々にもっと大きな数が創られていく。しかしそれとともに、これまで威力を発揮してきた日数和がとれないことに気づく。

それでも、日数和を使わない帰納法が成り立つことが、帰納的に理解される。そこでは「先祖数列」という概念が援用されることとなり、あわせて「計算と証明の違い」にも言及していくこととなる。



***

❺　無限大で少し計算してたんだけど。規則3からすぐに

$$\omega+1=(\{\omega, 2, 3, 4, 5, \cdots\}, \emptyset\},$$

で、これを単純にすると

$$\omega+1\equiv(\{\omega\}, \emptyset)$$

になる。

ⓐ　これは$\aleph$日の次の日に創られるのね。

❺　そうだね。それからさらにその次の日には

$$\omega+2\equiv(\{\omega+1\}, \emptyset)$$

ができて、

$$\omega+\frac{1}{2}\equiv(\{\omega\}, \{\omega+1\})$$

もできる。

ⓐ　$\omega-1$はどう？

❺　$\omega-1$か！　無限大から引くなんて考えもしなかったよ。無限大より少ない数なら有限じゃないか。でも規則を使ってどうなるか、確かめてみよう……これを見て。

$$\omega-1\equiv(\{1,2,3,4,\cdots\}, \{\omega\})$$

もちろん――これはすべての整数よりも大きくて、でも

ω よりも小さい中で最初に創られる数だ。

ⓐ　それよ。岩で無限大より小さい無限の数って言ってたのは。

いいわ。もう一つ考えて。$\omega+\pi$ はどう？

❶　簡単だよ。

$$\omega+\pi\equiv(\omega+\Pi_L,\ \omega+\Pi_R)$$

これは……$(2\aleph)$日に創られるんだ。それから $\omega+\varepsilon$ も、$\omega-\varepsilon$ も。

ⓐ　そうかあ。じゃあ、2ω もあるにちがいないわ。$\omega+\omega$ のこと。

❶　うん。

$$\omega+\omega=(\{\omega+1,\omega+2,\omega+3,\omega+4,\cdots\},\emptyset)$$

これを 2ω と言っていいんじゃないかな。掛け算はまだやってないけど。だって、きっと後で$(x+y)z\equiv xz+yz$を証明するんだから。そうなれば、$2z\equiv(1+1)z\equiv z+z$になるからね。

ⓐ　そうね。それから

$$3\omega=(\{2\omega+1,2\omega+2,2\omega+3,2\omega+4,\cdots\},\emptyset)$$

が$(3\aleph)$日にできて、その後も同じことね。

ⓑ　まだ掛け算のことは知らないけど、ω を ω 倍したら、絶対こうなると思うよ。

$$\omega^2 = (\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \cdots\}, \emptyset)$$

ⓐ　$\aleph^2$日にできるわけね。その間にコンウェイが小さい方の数について何をしなきゃなんないか、想像してみてよ。

ⓑ　そう言えば、これって、小さいとき近所でやってた競争のこと思い出さない？　何かの拍子に誰かが、誰がいちばん大きい数を知ってるか競争だって言い出すんだ。すぐに誰かがお父さんから無限大がいちばん大きい数だって聞いてくるんだけど、僕はそいつに「無限大たす１」って言って勝つ。それから無限大たす無限大になって、すぐに無限大掛ける無限大になるんだ。

ⓐ　でどうなったの？

ⓑ　「無限大の無限大の無限大の……」って、一息で言えるだけ繰り返して、そこで競争が終わるんだ。

ⓐ　でもそれよりもずっと大きいのがまだあるわ。

$$\omega^\omega = (\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \cdots\}, \emptyset)$$

それでもまだ始まったばかりだわ。

ⓑ　$\omega^{\omega^{\omega}}$とか、$\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$とかがあって、それがどこまでもあるってことだね。子どもの頃はどうしてそれを考えなかったんだろう。

ⓐ　ぜんぜん見たこともないことだったからよ……でも、私たちのした証明はもう正しくないんじゃないかしら。

ⓑ　何、まただめなの。やり直したところなのに。

　あっそうか、君が思いついたことがわかった気がする。日数和だ。

ⓐ　当たり。日数和に基づいた帰納では論証できないのよ。無限かもしれないから。

ⓑ　見つけた定理は、無限の場合については成り立たないかもしれない。成り立ったらいいんだけどね。今まで夢にも思わなかった数について証明するなんて、すごいよ。

ⓐ　無限の数についてお試しの計算をしたところでは、問題はなさそうだったわね。これについてしばらく考えさせて。

***

ⓐ　わかったわ。わかったと思う。「日数和」は要らないの。

❶　どうしてそんなことが出てきたの。

ⓐ　最初に「悪い数」で帰納をどう考えたか、思い出してみて。示さなきゃいけなかったのは、定理がxについて成り立たなかったら、X_Lの要素x_Lにも成り立たないものがあって、すると、X_{LL}の要素x_{LL}にも成り立たないものがあって、以下同様ってことだったわ。でも、そんな列が結局有限だとしたら、つまり$X_{LL\ldots L}$が空にならざるをえないのなら、そもそもxについて、その定理が成り立たないわけがなかったのよ。

❶　（口笛を吹いて）わかった。たとえば、$x+0=x$の証明では、$x+0=(X_L+0, X_R+0)$を証明しなけりゃいけない。帰納によって、X_Lにあるすべてのx_Lについて、x_L+0がx_Lに等しいことを示しておきたい。この前提が偽なら、$x_{LL}+0$があるx_{LL}について、x_{LL}と等しくなかったわけで、あるいはあるx_{LR}が犯人かもしれない。どんな反例も無限の反例の列を意味することになる。

ⓐ　これでしなきゃならないことは、無限の先祖数列はな

いってことを示すだけね。x_{i+1}が$X_{iL} \cup X_{iR}$にあるような$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$よ。

❺　これはいい表し方だ。

ⓐ　それに成り立つのよ。すべての数は（っていうか、実は数もどきなんだけど)、前に創られている数からできるからよ。どんな新しい数xを創っても、同時に$x_1 = x$から始まる無限の先祖数列はないわ。だって、さっき、X_LかX_Rにありうるどんなx_2を選んでも、そこから進んでいく無限数列はないことを証明してあるんだもん。

❺　それは論理が通っているし、美しい……でも、それって、帰納を使って帰納が正しいことを証明してるって感じなんだけど。

ⓐ　たぶんそのとおりね。これは本当は何かの公理にしなきゃならないんだわ。「前に創られた」っていう直観的な概念を形式化しているし。それって規則１でうまく言いつくろったものね。そう、それよ。規則１はこうやって表せば、厳密な足場の上に立てられるのよ。

❺　アリスが言っていることは、１変数の場合だけに言えることだね。僕らの日数和論法は、変数が二つ、三つ、

四つについてだって使ってきたよ。(x, y, z)についての機能が(y, z, x_L)みたいなものに基づいているとか何とか。

ⓐ　そのとおりよ。でもどの場合でも、帰納は変数の何かの順列に戻ってきて、そのうち少なくともひとつは追加のLやRの添え字がついたわね。ラッキーだったのは、これが無限の列はありえないってことだってこと。

$$(x, y, z) \to (y, z, x_L) \to (z_R, y, x_L) \to \cdots$$

みたいなことにはならないの。もしそうなったら、少なくとも一つの変数は無限の先祖列を持つことになって、規則１に反するもの。

ⓑ　（またアリスを抱きしめて）アリス、大好きだよ。好きなところが無限にたくさんある。

ⓐ　（くすくす笑って）「どんなにあなたを愛しているか、一つ一つ数えてみましょう」って？* $1, \omega, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}}$って。

ⓑ　それでも、この無限を築き上げるのを、こそこそと、それももしかしたら疑わしい方法で何かごまかしているみたいだなあ。どこがおかしいかはわからないけど、ま

*エリザベス・ブラウニング（1806～61）の詩による



だすっきりしない。

ⓐ　私が見たところでは、証明と計算の違いね。有限の場合には本質的な違いはなかったわ。ℵ日より前にできた数についてだけ言っていたときはよかったの。でも、今は証明と計算できるってこととははっきり違いがあるわ。無限の先祖数列はないけど、好きなだけ長くすることはできる。同じ数から出発してもそうなのよ。たとえば、$\omega, n, n-1, \cdots, 1, 0$ は、すべてのnについての ω の先祖数列よ。

ⓑ　確かに。僕は ω^2の先祖数列について考えてたところだ。それももちろん有限だけど、いくらでも長くできるから、有限だってことがはっきりしなくなるんだ。

ⓐ　この無制限の有限というのは、たとえば $2\times\pi\equiv\pi+\pi$ を正当に証明できるけど、$\pi+\pi$ を有限回の手順で計算できるとは限らないってことね。神様だけが計算を終えられるけど、人間にできるのは証明を終わらせることだけってこと。

ⓑ　ええっと、$\pi+\pi=(\pi+\Pi_L, \pi+\Pi_R)$で……いいぞ、わかった。計算の枝分かれが無限にあるけど、どの枝も有

限回の手順で終わるんだ。

ⓐ　私たちが使ってきた帰納のいいところは、「最初の場合」を別に証明しなくてもいいってことね。私が習った帰納のやり方では、まず$P(1)$とか、その類を証明しなきゃなんなかったんだけど、どういうわけか、それをせずにすませてきちゃったんだ。

ⓑ　ねえ、初めて帰納の本当の意味がわかったって感じがしない？　僕たちの理論が本当に成り立つってことを、どう言えばいいのか。有限の二進数だけじゃなくて、無限大の数にも無限小の数についても成り立つんだよ。

ⓐ　もしかしたら、定理8は別かもしれない。これは一定の特性がある「最初に創られた数」のことだから。それが何を意味するか、定義を手直ししなきゃいけないのかな……数をそれぞれの日に割り当てることはできるんじゃないかと思うけど。その日に創られた最大の数だとか、日を並べるとか……

ⓑ　その先は任せて。前から気づいてたんだけど、数はX_Rが空で、X_Lがそれまでに創られたすべての数のとき、その日に創られた最大の数になるんだ。

ⓐ　だから$\aleph$日と$(\aleph+1)$日はあるけど、$(\aleph-1)$日がないのかもしれない。

❶　そうだね。たぶん。でもちょっと僕には奥が深すぎるね。もう掛け算の方に行きたいんだけど。そうじゃない？

第十六章 ——— 掛け算

掛け算についてコンウェイが書いていることが、数式として再現される。そしてふたりは、その意味とそこから導ける具体的な計算例について検討していく。なお、本章に示されることの多くは、証明された結果ではなく、むしろ「予想」である。

「発見するたびに次のことが出てくるのね」
「無限に多くのことが残ってるよ…でも時間の量は有限しかない…」



ⓐ　コンウェイの掛け算規則を書いたところを見てみましょう。記号で書く方法があるに違いないんだけど……ふーん。「同じ類の部分」でコンウェイが言いたいことはもうわかってるわよね。

❺　これはきつすぎるよ。この中身を解読するんじゃなくて、僕たちなりの掛け算規則を考えてみようよ。コンウェイが足し算でしたようにしちゃいけないのかな。つまり、xy は $X_Ly \cup xY_L$ と $X_Ry \cup xY_R$ の間にあるはずだとか。少なくとも、負の数を考えなければ、そうなるはずだよ。

ⓐ　その定義だと足し算と同じじゃない。積も和と同じってことになるわよ。

❺　ふう。そうなるか……わかった。コンウェイの答えを認めるよ。その紙を見てみよう。

ⓐ　悪く思わないでね。あなたがしようとしたことは正しいんだから。ほら、まずやってみるっていつも言っているじゃない。

❺　はは、それこそ僕たちがおぼえたことじゃないかな。

ⓐ　私にわかるのは、せいぜい、コンウェイが xy の左集

合は

$$x_L y + x y_L - x_L y_L \text{または} x_R y + x y_{R'} - x_R y_R$$

の形をしたすべての数を含んで、右集合は、

$$x_L y + x y_R - x_L y_R \text{または} x_R y + x y_L - x_R y_L$$

の形をしたすべての数を含むってこと。ほら、左集合は「同じ類」から得て、右集合は「反対の類」になってるでしょう。この定義の意味はとれる？

ⓑ　ええっと、何かごちゃごちゃしてるな。xyは左集合より大きいことになってるんだから、

$$xy > x_L y + x y_L - x_L y_L$$

になるね。これは……そうだ、これは

$$(x - x_L)(y - y_L) > 0$$

と同じことだ。

ⓐ　そうね。正の数の積は正じゃなきゃ。xyが左集合と右集合の間にあるっていう他の三つの条件は、基本的にこういうことよ。

$$(x_R - x)(y_R - y) > 0,$$

$$(x - x_L)(y_R - y) > 0,$$

$$(x_R - x)(y - y_L) > 0$$

これで定義はわかりやすくなるわ。まだ何も証明してないけどね。

Ⓑ　調子に乗って掛け算の本体の法則を証明する前に、単純な場合を少し検算して確かめておきたいんだけど。

定理 20

$$xy = yx$$

定理 21

$$0y = 0$$

定理 22

$$1y = y$$

これはすべて簡単だ。*

Ⓐ　いいわ。無限大にゼロを掛けてもゼロね。こんな簡単な結果もあるわ。

定理 23

$$-(xy) = (-x)y$$

Ⓑ　なるほど。これなんか面白いんじゃない？**

定理 24

$$\frac{1}{2}x \equiv \left(\frac{1}{2}X_L \cup \left(x - \frac{1}{2}X_R\right), \left(x - \frac{1}{2}X_L\right) \cup \frac{1}{2}X_R\right)$$

Ⓐ　ねえ、私ずっと思ってたんだけど。「無限大の半分」

*定理 20 はxとyの対称性から明らか。定理 21 は、左右の集合の要素の成分いずれにも$\emptyset$が含まれるので、すべて$\emptyset$になる。したがって $0y = (\emptyset, \emptyset) = 0$。

**$\frac{1}{2} = (\{0\}, \{1\})$として、定義にあてはめる。ただし、$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$は成り立つものとする。

って何？

❺　無限大の半分！……すぐに出てくるよ。

$\frac{1}{2}\omega \equiv (\{1,2,3,4,\cdots\},\{\omega-1,\omega-2,\omega-3,\omega-4,\cdots\})$

$\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega=\omega$ を証明すると面白いね……おっと、こんなきれいなのもある。

$$\varepsilon\omega \equiv 1$$

僕たちの無限小が、無限大の逆数*だってことになった。

ⓐ　あなたがそれを計算している間に、私は掛け算一般について見てたんだ。数もどきにはちょっとすごいかな――$(\{1\},\emptyset)p$が$(\{0,1\},\emptyset)p$と同様じゃないような数もどきpがあることがわかったの。$(\{1\},\emptyset)$と$(\{0,1\},\emptyset)$は両方とも2と同様なのに。こんな厄介なところはあるけど、あなたの「大きな構図」方式を使って、任意の数もどきについて、こんなことを証明することはできると思うわ。

定理 25

$$\boldsymbol{x(y+z) \equiv xy+xz,}$$

*普通の数の世界では、$a\times b=1$となるとき、bをaの逆数と言うのをふまえる。$\varepsilon=(\{0\},\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\})$, $\omega=(\{1,2,3,\cdots\},\emptyset)$に掛け算の定義をあてはめる。空集合を含むものは空集合になることをふまえると、$(\{\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon,\cdots\},\{\omega,\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{3},\cdots\})$が得られる。これは左右から1に近づいていく数の集合から成るので、その間にある最初の数1となる。

定理 26

$$\boldsymbol{x(yz) \equiv (xy)z}$$

それに、任意の数について、

定理 27

$$\boldsymbol{x > x' \text{かつ} y > y' \text{ ならば、} (x-x')(y-y') > 0}$$

も。それに、xとyが数なら、必ずxyは数だってことが出てくると思うわ。

ⓑ　定理 27 は、あらゆる数について、

定理 28

$$\boldsymbol{x \equiv y \text{ ならば、} xz \equiv yz}$$

を示すのに使えるね。僕たちがしてきた計算はぜんぶ完璧に厳密だ。

これが石碑で言っていることぜんぶ片づいたんじゃないかな。「級数、商、根*」が漠然と出てくる以外は。

ⓐ　ふむ……割り算はどうなるの？……xが 0 と 1 の間にあれば、絶対、こんなことも証明できるわよ。

$$1-\frac{1}{1+x} \equiv (\{x-x^2,\ x-x^2+x^3-x^4,\ \cdots\},\ \{x,\ x-x^2+x^3,\ x-x^2+x^3-x^4+x^5,\ \cdots\})$$

*「級数」は、数の列を作り、その数を足し合わせたもの。数の世界には、無限級数の和として定義される数がある。たとえば、次に出てくる「分数」は、初項x、公比$-x$の無現等比級数の和として定義されている（左集合は偶数個の和、右集合は奇数個の和）。「商」は割り算の結果のこと。「根」は累乗$x^n=y$が成り立つとき、xはyのn乗根と言われる。これらの数も、今後の展開として登場することが予想される。

少なくとも、これで$\frac{1}{3}$は、$x=\frac{1}{2}$とすればできるわよ。たぶん、何かこのような方法を使って、ゼロでないすべての数には逆数ができるんじゃない？

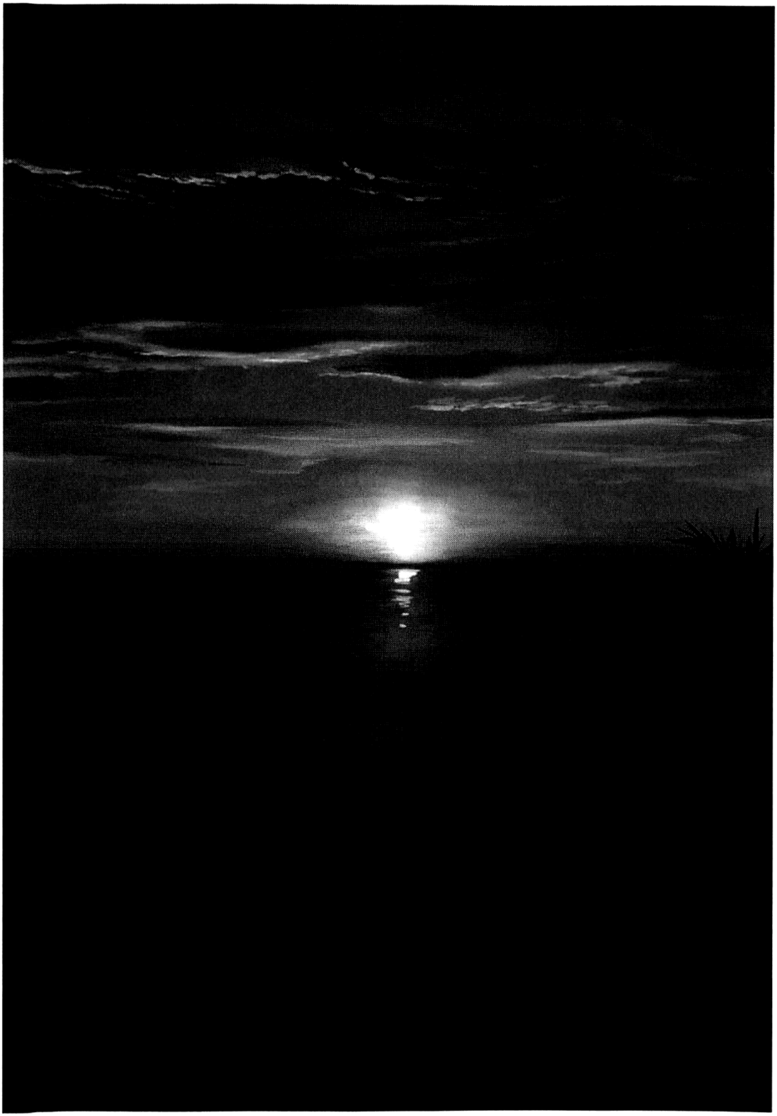
ⓑ　アリス、見てごらん、面白いよ。

$$\sqrt{\omega}\equiv(\{1,2,3,4,\cdots\},\{\frac{\omega}{1},\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{3},\frac{\omega}{4},\cdots\})$$

$$\sqrt{\epsilon}\equiv(\{\epsilon,2\epsilon,3\epsilon,4\epsilon,\cdots\},\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\})$$

ⓐ　（ビルの腕に飛び込んで）発見するたびに次のことが出てくるのね。

ⓑ　（夕陽を見つめて）無限に多くのことが残ってるよ……でも時間の量は有限しかない……



読者はこれは実話ではないと思ったかもしれない。しかし「J・H・W・H・コンウェイ」は実在する——ケンブリッジ大学のジョン・ホートン・コンウェイである。実在のコンウェイは、本書で言及したこと以外にも、こうした「変わった」数について顕著な成果を多く樹立した。たとえば、任意の係数の奇数次の多項式は根をもつなどのことである。また数もどき p はすべて、左と右という２組のプレーヤーで行なう二人ゲームにおける立場に対応する。p という状態から始め、

$$p>0,\ p<0$$

$$p=0,\ p \parallel 0$$

という四つの関係が、

左の勝ち、右の勝ち

後手が勝ち、先手が勝ち

に対応するという。理論はまだ生まれたばかりで、読者はまだ探っていない多くの問題をいじってみたいと思うかもしれない。対数はどうなるか。連続性は？ 数もどきの掛け算の特性は？ 一般化されたディオファントス方程式〔多変数の不定方程式で、整数解を求めようとするもの——訳者〕は？ 等々。

解説

ハンガリーの数学者、故アルフレート・レーニイは、3篇の刺激的な「数学に関する対話」を書き、1967年、サンフランシスコのホールデン・デイ社から出版した。最初の対話は紀元前440年頃の古代ギリシアを舞台にして、ソクラテスを登場させ、数学の本性について美しく述べている。第2の対話は紀元前212年のこととされ、アルキメデスによる、数学の応用に関するやはり美しい議論が収められている。第3の対話は、科学と数学との関係で、西暦1600年頃のガリレオが語っている。

私は本書を、1970年代の数学対話として書き、創造的な数学探究の本性を浮かび上がらせようとした。もちろん、主として楽しむためのものであり、喜びのいくぶんかが読者に伝わればと思っているが、心の奥では、あることを真剣に意図していることも認めなければならない。すなわち、現在の教育制度に足りない最も深刻なことに挙げられる、研究の訓練の不足を乗り越える助けになれるような教材を提供したいということだ。新しい数学がどうやって考えられるか、学生が経験できる機会は比較的に少ない。たいていは大学院になってからのことだ。

創造力は教科書では教えられないが、この小説のような「反教科書」なら使えるかもしれないと思った。そこでランダウの

『解析学の基礎』の正反対のものを書こうとしてみた。何とかして数学を「教室から連れ出して生活に入れ」、読者に自分の手で抽象的な数学の概念を調べてみたいと思わせよう――私のねらいはその一法を示すことだった。

数学研究の技法を伝える最善の方法は、おそらく詳細な事例研究を提示することである。コンウェイの最近の数に対する取り組みが、数学研究の重要な諸側面を解説するための、うってつけの媒体として目に入ってきた。それはほとんど自己充足した豊かな理論で、それでいて代数学とも解析学とも密接に関係しているからであり、しかもまだほとんど未開拓だからである。

言い換えれば、私の第一の狙いは、実はコンウェイの理論を教えることではなく、そのような理論をどうやって展開していくかを教えることである。そのため、本書の二人の登場人物が、徐々にコンウェイの数の体系を調べ、築き上げていくなかで、私は正解だけでなく、間違った出発点や失敗のことも記録しておいた。重要な原理、技法、喜び、情熱、数学の哲学など、十分に忠実に描きたいと思ったので、自分で実際に研究しているように物語を書いた（一年ほど前にジョン・コンウェイといっしょに昼食をしながらしゃべったときの漠然とした記憶以外には、資料は用いなかった）。

本書はまず大学で数学を勉強する、2年生か3年生あたりの学生を念頭に置いている。伝統的な数学のカリキュラムでは、

(a)「抽象的数学入門」とか、「数理論理学」といった授業用の補助教材として、あるいは(b)学生が自律的に研究する能力を開発するための学部生向けゼミの主教材として使うのがおそらくいちばんいい。

授業で使う本は、たいてい練習問題で補強されている。そこで、本書の「小説」手法の純粋さを損なうリスクは承知しつつ、補助的な問題の案をいくつか集めておいた。ゼミで使うときは、このような練習問題は、宿題にするよりは、授業時に自発的に議論するために、毎授業時の最初に取り上げるのが望ましい。

1. 3章の後。「抽象」とは何か、「一般化」とは何か。
2. 5章の後。gを、$x \leq y$なら$g(x) \leq g(y)$となるような、数を数に対応させる関数とし、
$$f(x) = (f(X_L) \cup \{g(x)\}, f(X_R))$$
を定義する。$f(x) \leq f(y)$になるのは、$x \leq y$のときだけであることを証明せよ。特殊な場合として、$g(x)$が0に恒等的に等しいとき、できるだけ多くの数について、$f(x)$の値を求めよ［註――12章の後になると、この練習問題は、「数」を「数もどき」に置き換えても意味をなす］。
3. 5章の後。x, y を、左側と右側が「同様」ではあるが同一ではない数とする。式で書けば
$$f_L: X_L \to Y_L, \quad f_R: X_R \to Y_R,$$

$$g_L\colon Y_L \to X_L, \quad g_R\colon Y_R \to X_R$$

を、$f_L(x_L)\equiv x_L$, $f_R(x_R)\equiv x_R$, $g_L(y_L)\equiv y_L$, $g_R(y_R)\equiv y_R$となる関数とすると、$x\equiv y$であることを証明せよ［アリスとビルは、この補助定理が自分たちの研究のいくつかで重要であることに気づかず、証明抜きで成り立つものとしていた。この補助定理は数もどきについても成り立つ］。

4．6章の後。これらのわずかの公理から、コンウェイの数の理論を展開するとき、証明でわれわれがすでに数について「知って」いる特性を使っている（たとえば、添え字$i-1$や$j+1$を使う）のは正当だろうか［注意——証明論的な議論になるかもしれないので、講師は準備をしておかなければならないかもしれない］。

5．9章の後。n日後の一般形の、形式を完全にした証明を求めよ［これは表記法の設計という有益な練習となる。いろいろな可能性があり、厳密な証明がわかりやすくなり、アリスとビルの直観的で式によらない証明にも合致するような表記法を求めるよう努めなければならない］。

6．9章の後。与えられた二進数が創造された日がわかる単純な式はあるか。

7．10章の後。$x\equiv y$ならば$-x\equiv -y$であることを証明せよ。

8．12章の後。できるだけ多くのx,yについて、$x\oplus y$の値を確かめよ。

9． 12章の後。規則1と2を、3か所とも$\not\geq$を<に換え、新たな規則

$x \leq y$かつ$y \not\leq x$のときにかぎり、$x < y$である

を加える。そこで、これらの定義を用いてコンウェイの数の理論を最初から展開せよ［これは最初の方の章の内容に関するいいおさらいになる。何か所かで論証を変えなければならない。主なハードルは、あらゆる数について$x \leq x$を証明することである。実に短い証明はあるが、簡単には見つからない。ここではあえて明らかにしないことにする。学生には、新しい関係“<”は、数もどきに関してコンウェイの関係と同一ではないことを発見するよう促すこと（もちろん数については同じことである）。新しい状況では、$x \leq x$は必ずしも成り立たない。また

$$x = (\{(\{0\}, \{0\})\},\ \emptyset)$$

ならば、コンウェイの体系では$x \equiv 0$が得られるが、新しい体系では$x \equiv 1$が得られる。コンウェイの定義の方がもっといい特性があるが、新しい関係も有益である］。

10． 13章の後。III(z, Z_L, y)とIII(Z_R, z, x)を、II(x, y, z)を証明するのに必要な条件からはずして、アリスとビルの循環論法を避ける別の方法を示せ。つまり、どのz_Lについても$z + y \leq z_L + y$となることは、ありえないことを直接に証

明せよ。

11. 14章の後。ℵ日の後何日かにできる、それぞれの実数「すぐ隣り」を決定せよ。

12. 15章の後。考えつく限り最大の無限大の数と、最も小さい正の無限小の数を作れ。

13. 15章の後。X_LとX_Rを数えられる集合に限定すればすむか［これは難しいが、面白い議論になるかもしれない。講師は序数についてしっかり勉強して予習しておくべきだろう］。

14. 本書全体のほとんどどこででも。

$$x \circ y = (X_L \cap Y_L,\ X_R \cup Y_R)$$

によって定義される演算の特性はどうなるか［これが$min(x,y)$では**ない**ことがわかるはずだ。他にも調べると面白い演算がたくさんある。たとえば、$x \circ y$が

$$(X_L \circ Y_L,\ X_R \cup Y_R)$$

または

$$((X_L \circ y) \cup (x \circ Y_L),\ X_R \cup Y_R)$$

などと定義されるとき］。

15. 16章の後。Xが**すべての**数の集合であるとして、$(X, \emptyset)$

は、いかなる数とも同等ではないことを示せ［注意しないと集合論の逆説が出てくる。厳密に言えば、すべての数のクラスは集合ではない。「すべての集合の集合」という逆説を参照のこと］。

16. 16章の後。

$$x \equiv (\{x-1\}, \{x+1\})$$

の場合、xを「一般化された整数」と呼ぶ。一般化された整数は加法、減法、乗法について閉じていることを示せ。一般化された整数には、通常の整数nも、$\omega \pm n$, $\frac{1}{2}\omega$なども含む［この練習題はサイモン・ノートンによる］。

17. 16章の後。ある整数（一般化されていない）について、$-n < x < n$であり、かつ

$$x \equiv (\{x-1,\ x-\frac{1}{2},\ x-\frac{1}{4}, \dots\},$$
$$\{x+1,\ x+\frac{1}{2},\ x+\frac{1}{4}, \dots\})$$

であるならば、xを実数と呼ぶ。実数は加法、減法、乗法について閉じており、普通に定義された実数と同型であることを証明せよ［この練習題と、以下の問題は、ジョン・コンウェイの提案による］。

18. 16章の後。規則1を変えて、(X_L, X_R)が数と言えるのは、$X_L \ngeq X_R$で、次の条件がみたされるときのみとする。

X_Lが最大の要素をもつか空集合であるのは、X_Rが最小の要素をもつか空集合のときのみである。

この条件下で、ぴったり実数が創造される（実数以上でも以下でもない）ことを示せ。

19. 16章の後。$p+p\equiv(\{0\},\{0\})$であるような数もどきpを求めよ［これは意外と難しく、面白い副次的問題につながる］。

20. 15章または16章の後。数もどき$(\{0\},\{(\{0\},\{0\})\})$は$>0$で、すべての正の数$x$について$<x$。これはまさしく無限小である。しかし$(\{0\},\{(\{0\},\{-1\})\})$はもっと小さい。任意の数もどき$p>0$は、何らかの十分大きな数$x$について、$>(\{0\},\{(\{0\},\{-x\})\})$である。

21. 16章の後。任意の数xについて

$$\omega^x=(\{0\}\cup\{n\omega^{x_L}|x_L\in X_L,\ n=1,2,3,\ldots\},$$
$$\{\frac{1}{2^n}\omega^{x_R}|x_R\in X_R,\ n=1,2,3,\ldots\})$$

を定義する［|の右は前提条件を表す］。$\omega^x\omega^y=\omega^{x+y}$を証明せよ。

22. 16章の後。

$(P_L, P_R) \in S$となるのは、$P_L = P_R \subseteq S$である
ときのみである

となるような対称的数もどきSの性質を調べよ。つまり、Sの要素は同一の左右集合をもっていて、左右の部分の要素についても同じということである。Sが加法、減法、乗法について閉じていることを示せ。さらに他にもSの性質を求めよ（たとえば、同様ではないSの要素が毎日何個創造されるか、その算術的に面白いところはどこか）［この果てしのない問題は、たぶんここに挙げた中で最高の問題だろう。そこにはきわめて豊かな理論が隠れているからだ］。

演習９,19,22については、熱心な先生方から求めがあれば、答えに至るヒントを送る。スタンフォード大の私宛に文書で連絡のこと。

とくに本書に依拠してゼミを運営する先生方のためにいくつかのことを述べて後記をまとめたい（それ以外の人はすぐに読むのをやめて、本を閉じること）。

物語には、授業中に議論できる多くの話題がいろいろと隠れている。最初の何章かは時間はかからないだろうが、すぐに１

回の授業で１章分をこなせなくなるだろう。最初に全員が物語り全体を見ておくのがいいかもしれない。終わりの方での展開が、最初の方を面白くするからだ。いつも強調すべきこととして、学生に、登場人物の重要な一般原則、手口（モードゥス・オペランディ）を「抽出する」よう求めることが挙げられる。二人はなぜしかじかの問題の扱い方をするのか、そのやり方のいいところ、悪いところは何か。アリスの「知恵」はビルとどう違うか（二人の性格は明瞭に異なる）。学生用の基本原則としては、暗示されるだけのことが多い数学的詳細について検算することも大事だ。本書の進み方がどうなっているか、本当にわかるにはそうするしかない。先を読む前に問題を自分で解いてみるほうがいい。省略記号「＊＊＊」が出てくるときは、登場人物が考えているか何か書いているときなので、読者も同じことをするのがいい。

ここに挙げたような演習の議論で授業が進まないときは、一人が話す回数を制限することにするのがいいと思う。そうすれば、よくしゃべる学生がやたらと口出しして議論をつまらなくするのが防げる。逆に全員が参加するようになる。

学期の終わりには３週間か４週間の猶予を与え、本書で明示的に議論されなかったいくつかの問題を調べるレポートを書くという宿題を出すのもお勧めだ。たとえば、先に挙げた答えのついていない練習問題は、ありうる主題をいくつか解説している。学生は、二人で組になって考えるのもいい。数学としての

内容だけでなく、作文力についても評価の対象にし、比率は五分五分だと伝えておこう。数学のレポートは普通の宿題とは違うことも言っておかなければならない。宿題はたいてい平板な事実を集めたもので、やる気などが見えないし、採点する側はそれをわかっているかどうかの試験と見なすものである。期末レポートは、数学の教科書のような文体で書かなければならない。書くことに関する経験をさせようと思えば、学生に、交代で、授業で見えてくることの要旨を用意させるのもいい。そうすると他の学生が自分のメモを取るのに気を取られることなく、議論の記録を得ることができる。私見では、現行の数学教育には二つの弱点がある。創造的思考の訓練が足りないことと、専門的な文章を書く訓練が足りないことである。小著がいずれの欠点をも補う助けになればと願う。

カリフォルニア州スタンフォード
1974年5月　　　　　　　　　　　　　　　　　　D.E.K.

探偵の仕事は精密な科学だ。あるいはそうあるべきで、科学と同じ冷たい、非情緒的な取り扱いをすべきものだ。君はその話をロマンチシズムで色づけしようとしてしまっている。それによって、ユークリッドの第５命題に恋愛や駆けおちの話をまぎれ込ませたような効果を生んでいる。

――シャーロック・ホームズ（『四つの署名』第１章）

訳者あとがき

本書は、Donald E. Knuth, Surreal Numbers, Addison-Wesley, 1974を訳出したものである（本書は、その後の訂正を反映した2003年の第15刷に依拠している。また、章の冒頭にある梗概と、＊をつけて入れた脚注や［ ］でくくった部分は、訳者による補足／蛇足である)。著者のクヌースは、アルゴリズムやプログラム論を中心に活躍するアメリカの数学者、コンピュータ学者で、組版ソフトTeXの作者としても知られる。その著者が、大学での数学教育を念頭に置いて書いたこの本は、原書はすでに15刷を数える、古典とも言うべき数学小説で、邦訳もすでに、好田順治訳『超現実数』として海鳴社から出版されている(1978年刊)。本書は、好田訳から四半世紀を経て、あらためてこの現代の古典を読んでもらいたいと、装いを変えて世に出しなおすことになったものである。

本書の概念上の舞台となっているのは、数の体系を、当の数をあらためて定義しなおすところから始め、文字どおりゼロから築き上げていくという、スリリングな試みである。新しい規則を立て、その規則に従って論理をたどっていくと（本書の場合はとくに、「AならばB」と「BでないならAでない」は同じことだという、論理学では基本事項であっても、一般にはあまり通用していない論理が活躍する)、数が創られ、それぞれの間に大小関係がつき、足し算引き算ができるようになり、実数や、無限大・無限小までもが生み出される（日常的な数の理解や感覚と合

う数の体系をもたらす規則を立てるところが、実はいちばんの工夫のしどころでもあるのだが)。もちろんそれは架空の由来であって、実際の数が本書に書かれた由来でできたわけではない(本書はあくまで小説として書かれている)。また、もちろん一般的な感覚では、数やその大小や足し算といったことは、すでに「あたりまえ」のことだ。そのあたりまえのことを、あらためて最初から、論理で築きなおすところが、数学の数学らしいところを象徴していると言えよう。著者の意図も、その体系ができていく過程を、数学を学ぶ人々に追体験、あるいはむしろ直接体験してもらおうというところにある。

数学が好きだったり得意だったりする人も、案外、この種のことは苦手である。あるいは多くの大学生の身になって言うなら、受験勉強のために、結果ばかりおぼえさせられてきたから、そのような教育は受けていない(だからできなくて当然だ)ということにもなる。こうしたごく普通の大学生の弁には、それなりの根拠と実感があって、もっともと言うべきところもある。しかし、その先もある——だからこそ今、これまでとは違う機会が与えられれば、それをとらえるべきなのではないか。今まで経験したことがないなら、今、ここで経験すべきなのではないか。まさにその機会が提供されているのではないか……ところが、教える側は、今まで経験がないだろうと思えばこそ、面白いだろうと思って経験のなさそうな素材を提供するのだが、実際には、その類のことは敬遠されることが多い(授業の感想として、多数とは言わなくても、わりあいよく出てくる内容に、「今日の話は聞いたことがあったからよくわかった/面白かった」というのがある。初めて聞く話ではだめなのだ)。

本書のような試みが抱える困難はそこにある。本書でも登場人物の一人がいみじくも言うように、できる学生は、制度の中でも楽しむことができる。このような本がなくても、自分でそれに類することを見つけさえするかもしれない。実は、本書を喜んで読んでくれる人は、実は本書を必要としない、数学のスリリングな部分をすでに知っている人たちではないか。逆に、その動機づけがなければ、本書のような意欲的な試みが提示されても、与えられた本は、もはやそれはこなすべき課題でしかなくなる。数学の本当の魅力を知らない人に、その本当の魅力を知ってもらうための試みは、それが他の誰かの成果であることによって、すでにしてその魅力を発揮できない、敬遠すべき対象になってしまうという宿命を抱えているのかもしれない。

それでも知ってもらいたい側は、手を変え品を変え、いろいろな試みを繰り出す。いろいろな入り口があれば、どれかに気を引かれて入ってくれて、魅力に目覚めてくれることも期待できるだろう。あるいは、原著者の意図とは別に、本書は教育の場以外のところで接してもらった方がいいのかもしれない。本書のように小説という形を取っていれば、少なくとも登場人物が感じている喜びの話として読んでもらい、そのことを「聞いたことがある」のうちに入れておいてもらえるかもしれないからだ。そうすれば、また別のところでこのような話に遭遇すれば、面白いと思ってもらえるかもしれない。

本訳書でも、訳注という形で論理や考え方を補った。間違いも含めて体系が立ち上がるところを追体験するという原書の意図からすれば、そうした補足は文字どおり蛇足であり、読者自身が実際に計算して埋めていかなければならないはずだ。しか

し、いっさいの補足なしに本書を読むためには、そもそも本書など必要がないほど、数学についての理解も動機も必要かもしれない。言わば必要悪として、あえて口をはさんだことを了解していただければと思う。

実を言うと、訳者は好田訳に二度挑んで挫折した経験がある。一度は大学生のとき、二度めは予備校で受験数学を教えていたときである。おそらく、好田訳の末尾にまとめられた訳注をいちいち参照する手間を惜しんだせいだろう。翻訳することになって、初めて台詞に出てこない、その間を補う機会が得られたというわけだ。もちろんすべて埋めたわけではないし、埋めきれるわけでもない。別のもっといい埋め方もあるだろう。ただ、少なくとも、登場人物が直ちに納得していることを、読者も直ちに納得しなければならないわけではないことだけはわかってもらえるだろう。なんでやねんと正当なつっこみを入れて、自分でその答えを探すきっかけになってくれればと、わが身を棚に上げて願っている（ジジェクという批評家は、美術館の学芸員という仕事について、作品を鑑賞するために必要な手間を、人々の代わりにかけてくれる人だと言う［拙訳『信じるということ』（産業図書）］。ある意味でこれはぜいたくなことで、そのぜいたくを自分の代わりに堪能してくれる人＝学芸員がいてくれるからこそ、それ以外の人は、安心して作品の価値を信じることができ、その評価をなぞれば鑑賞ができるというわけだ。現代社会にある現象の記述としては、なるほどと思う。訳者はこの本の趣旨を実践するという手間を、僭越ながら読者を代表して、まがりなりにもかける機会を得た。だから、それに任せて安心して筋をたどればいいというわけだ……ですましては、やはりいけないのだと思う）。

本書の再訳は、柏書房の編集者、橋口薫氏の勧めによって担当させてもらうことになった。分不相応のそしりを免れないような仕事だが、あえて引き受けたのは、氏の熱意による。このような機会を与えてもらったことに感謝したい。氏には、日本語版用のイラストの手配、構成上のアイデア、もちろん原稿のチェックなど、本を作る上での実務は、何から何まで面倒を見てもらった。サイトウユウスケ氏はイラストを、ヤマシタツトム氏はブックデザインを担当してくれた。これも記して感謝する。

2004年10月

訳者識

規則・定理一覧

規則 1

$$x = (X_L, X_R), ただし X_L \not\geq X_R$$

規則 2

$$x \leq y とは、X_L \not\geq y かつ x \not\geq Y_R のことである。$$

定理 1

$$x \leq y かつ y \leq z なら、x \leq z$$

定理 2

$$X_L \leq x かつ x \leq X_R$$

定理 3

$$x \leq x$$

定理 4

$$x \not\leq y ならば y \leq x$$

定理 5

$$x < y かつ y \leq z なら、x < z$$

定理 6

$$x \leq y \text{かつ} y < z \text{なら、} x < z$$

定理 7

$$Y_L < x < Y_R \text{なら、} x \equiv (Y_L \cup X_L, X_R \cup Y_R)$$

規則 3

$$x + y = ((X_L + y) \cup (Y_L + x), (Y_R + x) \cup (X_R + y))$$

規則 4

$$-x = (-X_R, -X_L)$$

定理 8

任意の数yが与えられていて、xが、$Y_L < x$かつ$x < Y_R$という特性をもった最初に作られた数だとすると、$x \equiv y$である。

定理 9

$$x + y = y + x$$

定理 10

$$x + 0 = x$$

定理 11

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

定理 12

$$x \equiv y \text{なら、} x+z \equiv y+z$$

定理 13

$$x \leq y \text{なら、} x+z \leq y+z$$

定理 14

$$x+z \leq y+z \text{なら、} x \leq y$$

定理 15

$$x-x \equiv 0$$

規則 5

$$x-y=x+(-y)$$

定理 16

$$-(-x)=x$$

定理 17

$$(x+y)-y \equiv x$$

定理 18

$$-(x+y)=(-x)+(-y),$$

定理 19

$$x \leq y \text{なら、} -y \leq -x$$

定理 20

$$xy = yx$$

定理 21

$$0y = 0$$

定理 22

$$1\,y = y$$

定理 23

$$-(xy) = (-x)\,y$$

定理 24

$$\frac{1}{2}x \equiv (\frac{1}{2}X_L \cup (x - \frac{1}{2}X_R), (x - \frac{1}{2}X_L) \cup \frac{1}{2}X_R)$$

定理 25

$$x(y+z) \equiv xy + xz,$$

定理 26

$$x(yz) \equiv (xy)\,z$$

定理 27

$x > x'$かつ$y > y'$ならば、$(x - x')(y - y') > 0$

定理 28

$x \equiv y$ならば、$xz \equiv yz$

ドナルド・E・クヌース
DONALD E. KNUTH

コンピュータ科学者。スタンフォード大学コンピュータ・サイエンス学部名誉教授。1938年アメリカ生まれ。コンピュータ・アルゴリズムの基礎を確立した人物。ライフワークである「アート・オブ・コンピュータ・プログラミング」シリーズは、情報科学の教科書・事典として世界中で広く使われ、現在も執筆中。また、組版ソフトウェアTeXの作者としても著名。1974年チューリング賞、1987年ニューヨークアカデミー科学賞、1996年京都賞ほか受賞多数。著書に『文芸的プログラミング』、『TeXブック』(ともにアスキー)、『コンピュータ科学者がめったに語らないこと』(SIBアクセス)ほか多数。最新刊は『アート・オブ・コンピュータ・プログラミングvol.1』(アスキー)。
http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/

松浦俊輔
まつうら・しゅんすけ

翻訳家。名古屋学芸大学非常勤講師など。訳書にパウンドストーン『パラドックス大全』、ウェッブ『広い宇宙に地球人しか見あたらない50の理由』（以上、青土社)、ダービーシャー『素数に憑かれた人たち』（日経ＢＰ社)、カプラン『ゼロの博物誌』（河出書房新社)、ミラー『アインシュタインとピカソ』(阪急コミュニケーションズ)、アーウィン編『マトリックスの哲学』（白夜書房）など。

至福の超現実数（しふくのちょうげんじつすう）
純粋数学に魅せられた男と女の物語

2004年12月10日　第1刷発行

著者——ドナルド・E・クヌース

翻訳者——松浦俊輔

発行者——富澤凡子

発行所——柏書房株式会社
東京都文京区本駒込1-13-14（〒113-0021）
電話［営業］03-3947-8251
［編集］03-3947-8254

ブックデザイン——ヤマシタツトム

イラストレーション——サイトウユウスケ
章扉イラスト：ジル・C・クヌース

印刷——光陽メディア

製本——協栄製本

ISBN4-7601-2646-5

職業は建築家 君たちが知っておくべきこと

R・ハーゲンバーグ

Ａ５判並製　定価：本体 2,000 円＋税　ISBN4-7601-2623-6
安藤忠雄／青木淳／坂茂／原広司／長谷川逸子／磯崎新／伊東豊雄／隈研吾／黒川紀章／槇文彦／内藤廣／妹島和世＋西沢立衛 SANAA ／丹下健三・丹下憲孝。世界的に活躍する 14 人が語る「建築家という生き方」とは。写真＆インタヴュー集。建築ブックガイド他資料付。

脳の中の小さな神々

茂木健一郎　聞き手＝歌田明弘

四六判並製　定価：本体 1,600 円＋税　ISBN4-7601-2572-8

ブッシュの野望 サウジの陰謀 石油・権力・テロリズム

C・アンガー　訳＝秋岡史

四六判上製　定価：1,800 円＋税　ISBN4-7601-2622-8

アホでマヌケなアメリカ白人 ISBN4-7601-2277-X
アホの壁 in USA ISBN4-7601-2491-8

マイケル・ムーア　訳＝松田和也

四六判並製　定価：本体 1,600 円＋税